Operadores lineales diagonalizables

Objetivos. Estudiar operadores lineales diagonalizables. Establecer criterios de operador lineal diagonalizable.

Requisitos. Independencia lineal de subespacios propios asociados a diferentes valores propios.

1. Definición (operador lineal diagonalizable). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que T es *diagonalizable* si existe una base $\mathcal{U}$ de V tal que la matriz $T_{\mathcal{U}}$ es diagonal.

2. Observaciones antes de la definición de matriz diagonalizable. A cada matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ asociamos el operador lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ definida mediante la siguiente regla:

$$T_A x = Ax \qquad \forall x \in \mathbb{F}^n.$$

Este operador T_A tiene propiedad que $(T_A)_{\mathcal{E}} = A$, donde $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{F}^n$. Es natural decir que A es *diagonalizable* si es diagonalizable el operador T_A, esto es, si existe una base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{F}^n$ tal que la matriz $(T_A)_{\mathcal{U}}$ es diagonal. Notemos que

$$(T_A)_{\mathcal{U}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}^{-1}(T_A)_{\mathcal{E}} P_{\mathcal{E},\mathcal{U}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}^{-1} A P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}.$$

Se sabe que a cada matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ le corresponde una única base $\mathcal{U}$ de $\mathbb{F}^n$ tal que $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{U}}$. Tomando en cuenta estas observaciones, obtenemos la siguiente definición.

3. Definición (matriz diagonalizable). Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *diagonalizable* si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que la matriz $P^{-1}AP$ es diagonal.

4. Definición (polinomio se factoriza en factores lineales). Sea $f \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$. Vamos a decir que f *se factoriza en factores lineales* sobre $\mathbb{F}$ si f se puede escribir en forma

$$f(x) = c(x - x_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_m)^{p_m},$$

donde $c, x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{F}$, $p_1, \ldots, p_m \in \{1, 2, \ldots\}$.

5. Ejemplos.

1. $f(x) = x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{Q}$.
2. $f(x) = x^2 - 7$ no se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{Q}$, pero se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = x^2+6$ no se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{R}$, pero se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{C}$.

6. Ejemplo. Este ejemplo sirve para comprender mejor la demostración del lema y del teorema escritos en continuación. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 5, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ y sea $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ una base de V tal que

$$Tu_1 = 7u_1, \qquad Tu_2 = 7u_2, \qquad Tu_3 = 7u_3, \qquad Tu_4 = 6u_4, \qquad Tu_5 = -3u_5.$$

- Escriba $T_{\mathcal{U}}$.
- Calcule C_T y $\mathrm{sp}(T)$.
- Para todo $\lambda \in \mathrm{sp}(T)$ calcule $\mathrm{r}(\lambda I_5 - T_{\mathcal{B}})$ y $\dim(\ker(\lambda I - T))$.

7. Proposición (criterio para que la matriz asociada a un operador lineal sea diagonal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal y sea $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_n)$ una base de V. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la matriz $T_{\mathcal{U}}$ es diagonal;

(b) los elementos de $\mathcal{U}$ son vectores propios de T, o sea $\mathcal{U}$ consiste de vectores propios de T.

Además, si se cumplen estas condiciones, entonces los elementos diagonales de $T_{\mathcal{U}}$ son valores propios de T.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Supóngase que

$$T_{\mathcal{U}} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Entonces por la definición de la matriz asociada $T_{\mathcal{U}}$ se tiene que $Tu_j = \alpha_j u_j$ para todo j. Además los vectores u_j son no nulos como elementos de la base $\mathcal{U}$. Por lo tanto, los vectores u_j son vectores propios de T.

(b)$\Rightarrow$(a). Supongamos que $u_1, \ldots, u_n$ son vectores propios de T y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son valores propios correspondientes (algunos de los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pueden coincidir entre si):

$$Tu_j = \alpha_j u_j \qquad (j \in \{1, \ldots, n\}).$$

Entonces por la definición de la matriz asociada a un operador lineal tenemos

$$T_{\mathcal{U}} = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n). \qquad \square$$

8. Teorema (criterio para que un operador lineal sea diagonalizable). Sean V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ todos los valores propios distintos de T y $S_{T,\lambda_k} \coloneqq \ker(\lambda_k I - T)$ los correspondientes subespacios propios. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) T es diagonalizable.

(b) En V existe una base de vectores propios de T.

(c) $\dim(S_{T,\lambda_1}) + \ldots + \dim(S_{T,\lambda_m}) = n$.

(d) El polinomio característico de T se factoriza en factores lineales sobre $\mathbb{F}$:

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{p_m},$$

y las multiplicidades algebraicas coinciden con las multiplicidades geométricas:

$$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \qquad \dim \ker(\lambda_j I - T) = p_j.$$

Demostración. La equivalencia (a)$\Leftrightarrow$(b) sigue de la proposición antes del teorema.

(c)$\Rightarrow$(b). Encontramos algunas bases $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$ de los subespacios $S_{T,\lambda_1}, \ldots, S_{T,\lambda_m}$ y denotemos por $\mathcal{U}$ a la contenación de las listas $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m$:

$$\mathcal{U} \coloneqq \mathcal{B}_1 \vee \ldots \vee \mathcal{B}_m.$$

Del teorema de la independencia lineal de subespacio propios asociados a diferentes valores propios sigue que $\mathcal{U}$ es una base de $W_1 + \ldots + W_m$. Como

$$|\mathcal{U}| = \sum_{k=1}^{m} |\mathcal{B}_k| = \sum_{k=1}^{m} \dim(S_{T,\lambda_k}) = n,$$

$\mathcal{U}$ es una base de V.

(d)$\Rightarrow$(c). Es grado del producto de polinomios es igual con el producto de los grados, por eso

$$\sum_{k=1}^{m} \dim(S_{T,\lambda_k}) = \sum_{k=1}^{m} p_k = \deg(\mathrm{C}_T) = n.$$

(a)$\Rightarrow$(d). Sea $\mathcal{U}$ una base tal que $T_{\mathcal{U}}$ es diagonal:

$$T_{\mathcal{U}} = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Denotemos por q_j al número de las entradas diagonales de la matriz $T_{\mathcal{U}}$ iguales a λ_j:

$$q_j \coloneqq \big|\{i \in \{1, \ldots, n\} \colon \quad \alpha_i = \lambda_j\}\big|.$$

Entonces $q_1 + \ldots + q_m = n$ y

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \mathrm{C}_{T_{\mathcal{U}}}(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \alpha_n) = (\lambda - \lambda_1)^{q_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m)^{q_m}.$$

Además,

$$\begin{aligned}\dim(\ker(\lambda_j I - T)) &= n - \mathrm{r}(\lambda_j I - T)) = n - \mathrm{r}(\lambda_j I_n - T_{\mathcal{U}}) \\ &= n - \begin{pmatrix}\text{el número de las entradas diagonales no nulas} \\ \text{de la matriz } \lambda_j I_n - T_{\mathcal{U}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\text{el número de las entradas diagonales nulas} \\ \text{de la matriz } \lambda_j I_n - T_{\mathcal{U}}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\text{el número de las entradas diagonales} \\ \text{de la matriz } T_{\mathcal{U}} \text{ iguales a } \lambda_j\end{pmatrix} = q_j. \qquad \square\end{aligned}$$

9. Corolario. Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$. Supongamos que T tiene n valores propios diferentes. Entonces T es diagonalizable.

10. Ejercicio. Sean V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal diagonalizable. Demuestre que el polinomio mínimo de T posée una factorización en factores lineales sobre $\mathbb{F}$, y todas sus raíces son simples:

$$\mu_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_m).$$

Sugerencia. Sea $\mathcal{B}$ una base tal que $T_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Calcule

$$(T_{\mathcal{B}} - \lambda_1 I) \cdot \ldots \cdot (T_{\mathcal{B}} - \lambda_m I).$$

11. Tarea adicional. Sean V un espacio vectorial $\mathbb{F}$ de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador lineal tal que μ_T se puede factorizar en factores lineales sobre $\mathbb{F}$, y todas sus raíces son simples. Demuestre que T es diagonalizable.

12. Ejemplo. Determine si la matriz dada A es diagonalizable o no. Si es diagonalizable, encuentre una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ -4 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

13. Ejemplo.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Ejercicios.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -6 & -3 & -6 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

15. Ejercicio (criterio para que una matriz sea escalar). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ y sea $\lambda \in \mathbb{F}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) A es diagonalizable y $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda\}$.

(b) $A = \lambda I_n$.