Matrices diagonales, ejercicios

Objetivos. Definir matrices diagonales y comprender cómo se suman y multiplican matrices diagonales. Aprender a multiplicar una matriz arbitraria por una matriz diagonal por la izquierda o por la derecha.

Requisitos. Operaciones con matrices.

Diagonal principal de una matriz

1. Ejemplo. En la siguiente matriz cuadrada de tamaño 3×3 están sombreadas las *entradas diagonales* (entradas de la *diagonal principal*):

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

La matriz A es tamaño 3×3, por eso tiene 9 entradas en total.

En la diagonal principal están 3 entradas: $a, \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}$.

Fuera de la diagonal principal están $\underbrace{\qquad}_{\text{¿cuántas?}}$ entradas: $\underbrace{b, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

2. Índices de las entradas de una matriz (repaso). Consideremos una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ con entradas generales. Escriba los índices de cada entrada:

$$A = \begin{bmatrix} \overset{i=1,\ j=1}{A_{1,1}} & \overset{i=1,\ j=2}{A_{1,2}} & \overset{i=1,\ j=3}{} & \overset{i=1,\ j=4}{} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}.$$

La matriz A tiene $\underbrace{\qquad}_{\text{¿cuántas?}}$ entradas en total.

Número de entradas en la diagonal principal: $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Número de entradas fuera de la diagonal principal: $\underbrace{\qquad}_{?}$.

3. Descripción formal de las entradas en la diagonal principal y fuera de la diagonal principal. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada.

¿Cuándo la entrada con índices (i, j) está en la diagonal principal de A?.

$$\text{Respuesta: cuando } i \underbrace{\qquad}_{?} j.$$

¿Cuándo la entrada con índices (i, j) está fuera de la diagonal principal de A?.

$$\text{Respuesta: cuando } i \underbrace{\qquad}_{?} j.$$

En otras palabras, las *entradas diagonales* de A son de la forma $A_{i,i}$.

4. Número de las entradas en la diagonal principal y fuera de la diagonal principal. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- ¿Cuántas entradas tiene A? $\underbrace{\qquad}_{?}$.
- ¿Cuántas entradas de A están en la diagonal principal? $\underbrace{\qquad}_{?}$.
- ¿Cuántas entradas de A están fuera de la diagonal principal? $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Definición formal de matrices diagonales

5. Definición informal. Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se denomina *matriz diagonal* si todas sus entradas fuera de la diagonal principal son iguales a cero.

6. Intentemos a escribir esta condición de manera más formal:

$$\text{cada entrada de } A \text{ que está fuera de la diagonal principal es } \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Recordemos que cada entrada de A se determina por un par ordenado de índices y escribamos la definición de manera aún más formal:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, \underbrace{\quad}_{?}\} \qquad \Big(A_{i,j} \text{ está fuera la diagonal principal} \Big) \implies \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big).$$

Falta escribir bien la condición que $A_{i,j}$ está fuera de la diagonal principal:

$$\forall i, j \in \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} \qquad \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big) \implies \Big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \Big).$$

7. Observación acerca de las entradas diagonales de una matriz diagonal. Sea A una matriz diagonal. Analicemos la situación con sus entradas diagonales. Lea bien la definición anterior y elija la afirmación correcta de las siguientes tres:

- ○ Las entradas diagonales de A deben ser distintas de cero.
- ○ Las entradas diagonales de A pueden ser arbitrarias, pues la definición no dice nada de estas.
- ○ Las entradas diagonales de A deben ser cero.

8. Ejemplos y contraejemplos. Determine cuáles de las siguientes matrices son diagonales:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notación breve para matrices diagonales

9. Introducimos esta notación con un ejemplo:

$$\operatorname{diag}(8,5,-4) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

10. Escriba en forma extensa:

$$\operatorname{diag}(-3,4) = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{diag}(7,0,2) = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Escriba en forma breve:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}\big(\underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}\big), \qquad \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

11. Análisis formal de la notación. Sean $d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R}$. Analicemos cómo se construye una matriz diagonal con entradas diagonales d_1, d_2, d_3:

$$\operatorname{diag}(d_1,d_2,d_3) = \begin{bmatrix} \overset{i=1,\ j=1}{A_{1,1} = d_1} & \overset{i=1,\ j=2}{A_{1,2} = 0} & \overset{i=1,\ j=3}{A_{1,3} = 0} \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Resumen:

$$A_{i,j} = \begin{cases} \qquad , & \text{si} \quad i = j; \\ \qquad , & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

12. Fórmula con el símbolo de Kronecker.

$$\operatorname{diag}(d_1,\ldots,d_n) \coloneqq \big[\, d_i\, \delta_{i,j} \,\big]_{i,j=1}^{n}.$$

Operaciones aritméticas con matrices diagonales

13. Suma de dos matrices diagonales.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} =$$

Fórmula breve:

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) + \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3) =$$

14. Producto de un escalar por una matriz diagonal. Sean $\lambda, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\lambda \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} =$$

Fórmula breve:

$$\lambda \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) =$$

15. Producto de dos matrices diagonales.

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} =$$

Fórmula breve:

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3) =$$