Matrices diagonales

Objetivos. Definir matrices diagonales y aprender a realizar operaciones algebraicas (adición, multiplicación por escalar y multiplicación) con matrices diagonales. Comprender cómo se transforma una matriz general al multiplicarla por una matriz diagonal del lado izquierdo o del lado derecho.

Requisitos. Operaciones con matrices, notación para las componentes de una matriz.

1 Ejercicio (descripción formal de las componentes en la diagonal principal y fuera de la diagonal principal)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Las componentes $A_{i,i}$ forman la *diagonal principal* de A y se llaman *componentes diagonales* de A. También se puede decir que los pares (i,i) son *posiciones diagonales* en la matriz.

- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está en la diagonal principal de A? Respuesta correcta: cuando $i = j$.
- ¿Cuándo $A_{i,j}$ está fuera de la diagonal principal de A?

Matrices diagonales

2 Definición (matriz diagonal)**.** Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se denomina *diagonal* si todas sus componentes fuera de la diagonal principal son iguales a cero:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \qquad \Big(i \neq j \Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(A_{i,j} = 0 \Big).$$

Denotemos por $\operatorname{Diag}_n(\mathbb{F})$ al conjunto de todas las matrices diagonales de tamaño $n \times n$ sobre el campo $\mathbb{F}$.

3 Definición (la matriz diagonal con componentes diagonales dadas)**.** Dado un vector $a = [a_i]_{i=1}^n \in \mathbb{F}^n$, denotemos por $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ o brevemente por $\operatorname{diag}(a)$ la siguiente matriz:

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \coloneqq \big[a_i \delta_{i,j} \big]_{i,j=1}^n = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{bmatrix}.$$

4 Ejemplo.

$$\operatorname{diag}(3, 5, -2) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \operatorname{diag}(-7, 4, 0, 5) = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Notemos que las componentes diagonales de una matriz diagonal *pueden ser iguales o cero*. Por ejemplo, la matriz cuadrada nula $\mathbf{0}_{n,n}$ es una matriz diagonal. Es un error común pensar que las componentes diagonales de una matriz diagonal deben ser distintas de cero.

5 Proposición. *Para cada a en $\mathbb{F}^n$, la matriz $\operatorname{diag}(a)$ pertenece a la clase $\operatorname{Diag}_n(\mathbb{F})$. Para cada matriz D de clase $\operatorname{Diag}_n(\mathbb{F})$, existe un único vector a en $\mathbb{F}^n$ tal que $D = \operatorname{diag}(a)$.*

Demostración. Ejercicio. □

6 Definición (matriz escalar)**.** Una matriz cuadrada se llama *matriz escalar* si es un múltiplo de la matriz identidad. Más formalmente, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *matriz escalar* si existe un $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $A = \alpha I_n$.

7 Ejercicio. Mostrar que toda matriz escalar es una matriz diagonal.

8 Proposición (sobre la suma de dos matrices diagonales)**.** *Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ y $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{F}$. Entonces*

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) + \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n).$$

Demostración. Denotemos la matriz $\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ por A y la matriz $b_1, \ldots, b_n$ por B. Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$(A + B)_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} = a_i \delta_{i,j} + b_i \delta_{i,j} = (a_i + b_i)\delta_{i,j}.$$

La última expresión es el (i, j)-ésimo elemento de la matriz $\operatorname{diag}(a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$. □

9 Proposición (sobre el producto de una matriz diagonal por un escalar)**.** *Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ y $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces*

$$\lambda \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \operatorname{diag}(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n).$$

10 Proposición (sobre el producto de matrices diagonales)**.**

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n).$$

11 Problema. Demostrar de manera formal la proposición del producto de matrices diagonales usando la definición del producto y la propiedad principal de la delta de Kronecker.

12 Ejemplo (producto de matrices diagonales por matrices arbitrarios)**.** Calculemos los siguientes productos:

$$\operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3) \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3).$$

13 Proposición (el producto de una matriz por una matriz diagonal).

1. *Al multiplicar una matriz arbitraria A por la matriz diagonal* $\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ *del lado izquierdo, para todo índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ los elementos de la i-ésima fila de A se multiplican por b_i.*

2. *Al multiplicar una matriz arbitraria A por la matriz diagonal* $\operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ *del lado derecho, para todo índice $j \in \{1, \ldots, n\}$ los elementos de la j-ésima columna de A se multiplican por b_j.*

14 Ejemplo (el producto de matrices diagonales). Calculemos los siguientes productos:

$$\operatorname{diag}(2, 7, -3) \operatorname{diag}(1, 5, 4), \qquad \operatorname{diag}(5, 1) \operatorname{diag}(-2, 8).$$

15 Proposición (el criterio de la invertibilidad de una matriz diagonal). *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz diagonal, $A = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) A es invertible;

(b) todas las componentes diagonales de A son distintas de cero: $a_1 \neq 0, \ldots, a_n \neq 0$.

Demostración. (a)⇒(b). Sea A invertible, $B = A^{-1}$. Entonces para todo índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene

$$1 = (AB)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k} B_{k,i} = a_i B_{i,i}.$$

De allí $a_i \neq 0$.

(b)⇒(a). Supongamos que los elementos $a_1, \ldots, a_n$ son distintos de cero. Entonces la matriz $B = \operatorname{diag}(1/a_1, \ldots, 1/a_n)$ es la inversa a la matriz A. □

16 Observación. Después de conocer los conceptos de *anillo* y de *álgebra* (anillo con multiplicación por escalares), uno puede notar que el conjunto $\mathbb{F}^n$ con operaciones por componentes es un álgebra sobre $\mathbb{F}$. Por otro lado, el conjunto $\operatorname{Diag}_n(\mathbb{F})$ es una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. La función diag es un isomorfismo entre las álgebras $\mathbb{F}^n$ y $\operatorname{Diag}_n(\mathbb{F})$.