Matrices diagonales
(tratamiento avanzado)

Estos apuntes están escritos para estudiantes de los últimos semetres de licenciatura.

Objetivos. Mostrar que el álgebra de las matrices diagonales $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ es isomorfa al álgebra $\mathbb{F}^n$ con las operaciones por componentes. Comprender cómo se transforma una matriz general al multiplicarla por una matriz diagonal del lado izquierdo o del lado derecho.

Requisitos. Operaciones con matrices, notación para las componentes de una matriz, el concepto de álgebra.

En estos apuntes suponemos que $\mathbb{F}$ es un campo. Por ejemplo, $\mathbb{F}$ puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Denotemos por $\odot$ la multiplicación por componentes en $\mathbb{F}^n$:

$$a \odot b \coloneqq \left[a_j b_j\right]_{j=1}^{n}.$$

Ya sabemos que el conjunto $\mathbb{F}^n$ con las operaciones lineales comunes y con esta multiplicación por componentes es un álgebra sobre el campo $\mathbb{F}$. El vector de unos, $\mathbf{1}_n$, es la identidad de esta álgebra.

Matrices diagonales

1 Definición (matrices diagonales)**.** Una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se denomina *diagonal* si todos sus elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero. Denotemos por $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ el conjunto de las matrices diagonales:

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{F}) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})\colon \quad \forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \qquad \Big(j \neq k \Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(A_{j,k} = 0 \Big) \right\}.$$

2 Definición (la función diag)**.** Dado un vector $a = [a_j]_{j=1}^n \in \mathbb{F}^n$, denotemos por $\operatorname{diag}(a)$ la siguiente matriz:

$$\operatorname{diag}(a) \coloneqq \left[a_j \delta_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n}.$$

3 Ejemplo. Si $a = [3, 0, -2]^\top$, entonces

$$\operatorname{diag}(a) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

4 Proposición. *Sea* $a \in \mathbb{F}^n$*. Entonces* $\operatorname{diag}(a) \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$.

Demostración. Para cualesquiera j, k en $\{1,\ldots,n\}$, si $j \neq k$, entonces

$$\operatorname{diag}(a)_{j,k} = a_j \delta_{j,k} = 0.$$ □

5 Proposición. *Sea $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. Entonces existe un único vector a en $\mathbb{F}^n$ tal que $D = \operatorname{diag}(a)$.*

Idea de demostración. Existencia. Pongamos

$$a \coloneqq \left[D_{j,j}\right]_{j=1}^n.$$

Unicidad. Si $D = \operatorname{diag}(a)$, entonces $a_j = D_{j,j}$ para cada j. □

6 Definición (matriz escalar)**.** Una matriz cuadrada se llama *matriz escalar* si es un múltiplo de la matriz identidad. Más formalmente, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *matriz escalar* si existe un $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $A = \alpha I_n$.

7 Ejercicio. Mostrar que toda matriz escalar es una matriz diagonal.

8 Observación. Dependiendo de situación o de gustos, la función diag se puede considerar con el codominio $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ o $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. Si la consideramos con el codominio $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$, entonces esta función es invertible, y su inversa está dada por la siguiente fórmula:

$$\operatorname{diag}^{-1}(D) = \left[D_{j,j}\right]_{j=1}^n.$$

En los lenguajes de programación Matlab y GNU Octave, la inversa de la función diag se denota también por diag.

```
a = [3; 0; -2]
D = diag(a)
b = diag(D)
```

9 Proposición (las álgebras $\mathbb{F}^n$ y $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ son isomorfas)**.** *El conjunto $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ es una subálgebra del álgebra $\mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. La función $\operatorname{diag}\colon \mathbb{F}^n \to \mathcal{D}_n(\mathbb{F})$ es un isomorfismo de álgebras.*

Demostración. Ya hemos mostrado que diag es una biyección. Es fácil ver que la función diag es lineal. Probemos que diag convierte el producto $\odot$ en el producto de matrices. Sean $a, b \in \mathbb{F}^n$. Por un lado,

$$\big(\operatorname{diag}(a)\operatorname{diag}(b)\big)_{j,k} = \sum_{s=1}^n \operatorname{diag}(a)_{j,s}\operatorname{diag}(b)_{s,k} = \sum_{s=1}^n a_j\delta_{j,s}b_s\delta_{s,k} = a_jb_j\delta_{j,k}.$$

Por otro lado,

$$\operatorname{diag}(a \odot b)_{j,k} = (a\dot{b})_j\delta_{j,k} = a_jb_j\delta_{j,k}.$$

Como la función diag es lineal y multiplicativa, la imagen de esta función es una subálgebra del álgebra $\mathcal{D}_n(\mathbb{F})$. □

10 Ejercicio (el criterio de la invertibilidad de una matriz diagonal)**.** Sea $a \in \mathbb{F}^n$. ¿Cuándo a es invertible en el álgebra $\mathbb{F}^n$? ¿Cuándo la matriz $\operatorname{diag}(a)$ es invertible?

11 Observación. Se puede decir que la función diag realiza la representación canónica del álgebra $\mathbb{F}^n$.

Multiplicación de matrices diagonales por vectores o matrices

12 Ejemplo (el producto de una matriz diagonal por un vector)**.** Calculemos el siguiente producto:

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

13 Proposición. *Sean $a, b \in \mathbb{F}^n$. Entonces*

$$\operatorname{diag}(a)b = a \odot b.$$

14 Observación. Para un vector fijo a en $\mathbb{F}^n$, la función $b \mapsto a \odot b$ es un operador lineal. La matriz $\operatorname{diag}(a)$ es la matriz asociada a este operador lineal, respecto la base canónica de $\mathbb{F}^n$.

15 Ejemplo (productos de matrices diagonales por matrices arbitrarios)**.** Calculemos los siguientes productos:

$$\operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3) \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3).$$

16 Proposición (el producto de una matriz diagonal por una matriz general)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea $b \in \mathbb{F}^m$. Entonces la matriz $\operatorname{diag}(b)A$ se obtiene de la matriz A al multiplicar la j-ésima fila de A por el escalar d_j, para cada j:*

$$\operatorname{diag}(b)A = \left[b_j A_{j,k}\right]_{j,k=1}^{m,n}.$$

17 Proposición (el producto de una matriz general por una matriz diagonal)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$ y sea $b \in \mathbb{F}^n$. Entonces la matriz $A \operatorname{diag}(b)$ se obtiene de la matriz A al multiplicar la k-ésima columna de A por el escalar d_k, para cada k:*

$$A \operatorname{diag}(b) = \left[A_{j,k} b_k\right]_{j,k=1}^{m,n}.$$