# Determinante como una forma polilineal alternante

Egor Maximenko

ESFM del IPN

4 de enero de 2013

# Contenido

# Plan

- Repasar la definición del determinante y propiedades básicas.

# Plan

- Repasar la definición del determinante y propiedades básicas.
- Definir formas $n$-lineales alternantes sobre un espacio vectorial $V$.

# Plan

- Repasar la definición del determinante y propiedades básicas.
- Definir formas $n$-lineales alternantes sobre un espacio vectorial $V$.
- Mostrar que la función determinante de la matriz es una forma $n$-lineal alternante de sus renglones (también de sus columnas).

# Plan

- Repasar la definición del determinante y propiedades básicas.
- Definir formas $n$-lineales alternantes sobre un espacio vectorial $V$.
- Mostrar que la función determinante de la matriz es una forma $n$-lineal alternante de sus renglones (también de sus columnas).
- Demostrar que cada forma $n$-lineal alternante se puede expresar a través de la función determinante.

# Plan

- Repasar la definición del determinante y propiedades básicas.
- Definir formas $n$-lineales alternantes sobre un espacio vectorial $V$.
- Mostrar que la función determinante de la matriz
es una forma $n$-lineal alternante de sus renglones
(también de sus columnas).
- Demostrar que cada forma $n$-lineal alternante se puede expresar
a través de la función determinante.
- Demostrar que la función determinante de la matriz
es la única forma $n$-lineal alternante de los renglones
que toma el valor 1 en la matriz identidad.

# Requisitos

- Permutaciones.
- Signo de una permutación.
- Funciones antisimétricas.
- Definición del determinante a través de permutaciones.

# Contenido

# Definición del determinante (repaso)

## Definición

Sea $\mathbb{F}$ un campo y sea $A = \left[a_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$,
es decir, $A$ es una matriz $n \times n$ con entradas en $\mathbb{F}$.

El determinante de $A$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)} \\ &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi)\, a_{1,\varphi(1)} \cdots a_{n,\varphi(n)}.\end{aligned}$$

Aquí la suma es sobre todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$
y por consecuencia contiene $n!$ sumandos.

# Propiedades básicas del determinante (repaso)

Usando la definición es fácil demostrar las siguientes propiedades:

# Propiedades básicas del determinante (repaso)

Usando la definición es fácil demostrar las siguientes propiedades:

**Determinante de la matriz transpuesta**

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

# Propiedades básicas del determinante (repaso)

Usando la definición es fácil demostrar las siguientes propiedades:

### Determinante de la matriz transpuesta

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

### Determinante de una matriz triangular superior

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $a_{i,j} = 0$ siempre que $i > j$. Entonces

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

# Propiedades básicas del determinante (repaso)

Usando la definición es fácil demostrar las siguientes propiedades:

## Determinante de la matriz transpuesta

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

## Determinante de una matriz triangular superior

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $a_{i,j} = 0$ siempre que $i > j$. Entonces

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}.$$

## Determinante de la matriz identidad

$$\det(I_n) = 1.$$

# Contenido

# Formas lineales o funcionales lineales

## Definición (forma lineal o funcional lineal)

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.
Una función $f\colon V \to \mathbb{F}$ se llama forma lineal sobre $V$ si esta función es lineal, es decir, aditiva y homogenea:

$$f(\lambda b + \mu c) = \lambda f(b) + \mu f(c).$$

# Formas bilineales

## Definición (forma bilineal)

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.
Una función $f\colon V^2 \to \mathbb{F}$ se llama forma bilineal sobre $V$
si esta función es lineal respecto a cada uno de sus dos argumentos,
es decir, si para todos $a_1, a_2, b, c \in V$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$
se cumplen las igualdades:

$$f(\lambda b + \mu c, a_2) = \lambda f(b, a_2) + \mu f(c, a_2);$$

$$f(a_1, \lambda b + \mu c) = \lambda f(a_1, b) + \mu f(a_1, c).$$

# Formas trelineales

## Definición (forma trilineal)

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.
Una función $f\colon V^3 \to \mathbb{F}$ se llama forma trilineal sobre $V$
si esta función es lineal respecto a cada uno de sus tres argumentos,
es decir, para todos $a_1, a_2, a_3, b, c \in V$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$
se cumplen las igualdades:

$$f(\lambda b + \mu c, a_2, a_3) = \lambda\, f(b, a_2, a_3) + \mu\, f(c, a_2, a_3);$$

$$f(a_1, \lambda b + \mu c, a_3) = \lambda\, f(a_1, b, a_3) + \mu\, f(a_1, c, a_3);$$

$$f(a_1, a_2, \lambda b + \mu c) = \lambda\, f(a_1, a_2, b) + \mu\, f(a_1, a_2, c).$$

# Formas polilineales (multilineales)

## Definición (forma $k$-lineal)

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.
Una función $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ se llama forma $k$-lineal sobre $V$,
si esta función es lineal respecto a cada uno de sus $k$ argumentos,
es decir, si para todo índice $i \in \{1, \ldots, k\}$,
todos vectores $a_1, \ldots, a_{i-1}, b, c, a_{i+1}, \ldots, a_n \in V$
y todos escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ se cumple la igualdad:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, \underbrace{\lambda b + \mu c}_{\substack{i\text{-ésimo}\\ \text{argumento}}}, a_{i+1}, \ldots, a_n) = \lambda f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

$$+ \mu f(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

# Ejemplo de una forma 4-lineal sobre $\mathbb{F}$

**Ejemplo**

Consideremos $\mathbb{F}$ como espacio vectorial de dimensión 1.
La siguiente función $f$ es una forma 4-lineal sobre $\mathbb{F}$:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

# Funciones alternantes

## Definición (función alternantes)

Una funcion $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ se llama alternante
si se anula siempre que algunos de sus $n$ argumentos coinciden:

$$\text{si } a_i = a_j \text{ para algunos } i \text{ y } j \text{ con } 1 \le i < j \le n,$$
$$\text{entonces } f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

# Funciones alternantes

**Definición (función alternantes)**

Una funcion $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ se llama alternante
si se anula siempre que algunos de sus $n$ argumentos coinciden:

$$\text{si } a_i = a_j \text{ para algunos } i \text{ y } j \text{ con } 1 \le i < j \le n,$$
$$\text{entonces } f(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

**Ejemplo (producto de todas las diferencias posibles)**

La siguiente función $f\colon \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$ es alternante:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2).$$

# Funciones antisimétricas (repaso)

## Definición (función antisimétrica)

Una función $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ se llama antisimétrica si para todo par de índices $(i,j)$, donde $1 \le i < j \le n$, y para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$ se cumple la siguiente propiedad:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) =$$
$$= -f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

# Funciones antisimétricas (repaso)

## Definición (función antisimétrica)

Una función $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ se llama antisimétrica
si para todo par de índices $(i, j)$, donde $1 \le i < j \le n$,
y para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$ se cumple la siguiente propiedad:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) =$$
$$= -f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Estudiando permutaciones hemos demostrado el siguiente teorema:

# Funciones antisimétricas (repaso)

## Definición (función antisimétrica)

Una función $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ se llama antisimétrica
si para todo par de índices $(i, j)$, donde $1 \le i < j \le n$,
y para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$ se cumple la siguiente propiedad:

$$f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) =$$
$$= -f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_j, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Estudiando permutaciones hemos demostrado el siguiente teorema:

## Teorema (permutaciones y funciones antisimétricas)

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una función antisimétrica y sea $\varphi \in S_n$. Entonces*

$$f(a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(n)}) = \operatorname{sgn}(\varphi)\, f(a_1, \ldots, a_n).$$

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

**Teorema**

*Sea* $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ *una forma* $n$*-lineal alternante sobre* $V$*.*
*Entonces* $f$ *es antisimétrica.*

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$. Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

$$g(b + c, b + c) =$$

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

$$g(b + c, b + c) = g(b, b) + g(b, c) + g(c, b) + g(c, c).$$

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

$$g(b + c, b + c) = g(b, b) + g(b, c) + g(c, b) + g(c, c).$$

Como $g$ es alternante,

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

$$g(b + c, b + c) = g(b, b) + g(b, c) + g(c, b) + g(c, c).$$

Como $g$ es alternante, $g(b + c, b + c) = 0$, $g(b, b) = 0$, $g(c, c) = 0$.

# Formas $n$-lineales alternantes son antisimétricas

## Teorema

*Sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma $n$-lineal alternante sobre $V$.*
*Entonces $f$ es antisimétrica.*

## Demostración.

Sean $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i < j$. Fijamos los argumentes $a_k \in V$, $k \neq i$, $k \neq j$, y consideremos la función $g\colon V^2 \to \mathbb{F}$:

$$g(b, c) := f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n).$$

Sabemos que $g$ es 2-lineal y alternante.
Demostremos que $g$ es antisimétrica.

$$g(b + c, b + c) = g(b, b) + g(b, c) + g(c, b) + g(c, c).$$

Como $g$ es alternante, $g(b + c, b + c) = 0$, $g(b, b) = 0$, $g(c, c) = 0$.
Obtenemos que $0 = g(b, c) + g(c, b)$, i.e. $g(c, b) = -g(b, c)$. □

# Contenido

# Determinante es una forma $n$-lineal de los renglones

## Notación (determinante como función de los renglones)

A veces es cómodo considerar la función determinante
como una función de $n$ argumentos vectoriales:
para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$, donde $a_i = \left[a_{i,j}\right]_{j=1}^n$,

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

# Determinante es una forma $n$-lineal de los renglones

## Notación (determinante como función de los renglones)

A veces es cómodo considerar la función determinante como una función de $n$ argumentos vectoriales: para $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}^n$, donde $a_i = \left[a_{i,j}\right]_{j=1}^{n}$,

$$\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_n) := \det \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

## Teorema (determinante es una forma $n$-lineal de los renglones)

$$\begin{aligned} &\operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, \lambda b + \mu c, a_{k+1}, \ldots, a_n) = \\ &= \lambda \operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ &\quad + \mu \operatorname{Det}(a_1, \ldots, a_{k-1}, c, a_{k+1}, \ldots, a_n). \end{aligned}$$

# Determinante es una función $n$-lineal de los renglones

## Demostración.

Dada una permutación $\varphi \in S_n$, el sumando correspondiente es

$$\operatorname{sgn}(\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\varphi(i)} \cdot (\lambda b_{\varphi(k)} + \mu c_{\varphi(k)}) \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\varphi(i)}.$$

Usando las propiedades de las operaciones en el campo $\mathbb{F}$, podemos escribir esta expresión en la forma:

$$\begin{aligned} &\lambda \operatorname{sgn}(\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\varphi(i)} \cdot b_{\varphi(k)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\varphi(i)} \\ +&\mu \operatorname{sgn}(\varphi) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} a_{i,\varphi(i)} \cdot c_{\varphi(k)} \cdot \prod_{i=k+1}^{n} a_{i,\varphi(i)}. \end{aligned}$$

Sumando sobre todas $\varphi \in S_n$ obtenemos el resultado del teorema. $\square$

# Determinante es una función alternante de los renglones

## Teorema (determinante es una función alternante de los renglones)

*Si dos renglones de una matriz son iguales,*
*entonces su determinante es igual a cero.*

*De manera más formal:*

*Sea* $n \geq 2$, *sea* $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^{n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ *y sean* $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p < q$.
*Supongamos que el* $p$*-ésimo renglón de* $A$ *coincide con el* $q$*-ésimo:*

$$a_{p,j} = a_{q,j} \qquad \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

*Entonces* $\det(A) = 0$.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$$A_3: \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Escribamos todas permutaciones pares.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$A_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_3\tau_{1,3}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Cada permutación par $\varphi$ confrontamos con la permutación impar $\varphi\tau_{1,3}$ que se obtiene de $\varphi$ al transponer $\varphi(1)$ y $\varphi(3)$.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$A_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A_3\tau_{1,3}$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

3. De esta manera obtenemos todas permutaciones impares.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$$A_3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \quad +a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \quad +a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}$$

$$-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \quad -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \quad -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$

$$A_3\tau_{1,3}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. A cada permutación corresponde un sumando del determinante.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$$
A_3: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}
$$

$$
+a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \qquad +a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} \qquad +a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}
$$

$$
-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \qquad -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} \qquad -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}
$$

$$
A_3\tau_{1,3}: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

5. Usamos la condición que el primer renglón de $A$ es igual al segundo:
$a_{1,1} = a_{3,1}$, $\quad a_{3,3} = a_{1,3}$ etc.

# Determinante es una función alterna de los renglones

## Demostración para un caso particular ($n = 3$, $p = 1$, $q = 3$)

$$
\begin{array}{cccc}
A_3: & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\[2ex]
 & +a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} & +a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} & +a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\[1ex]
 & \times & \times & \times \\[1ex]
 & -a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} & -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} & -a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\[2ex]
A_3\tau_{1,3}: & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

6. Vemos que los sumandos del determinante se eliminan por pares, así que el determinante es igual a cero. □

# Determinante es una función alternante de los renglones

## Lema para la demostración general

# Determinante es una función alternante de los renglones

## Lema para la demostración general

Para demostrar este teorema usaremos la siguiente afirmación que hemos probado estudiando permutaciones.
Recordemos que $A_n := \{\varphi \in S_n \colon \operatorname{sgn}(\varphi) = 1\}$.

### Lema

*Sea $n \geq 2$ y sea $\psi \in S_n \setminus A_n$ una permutación impar fija.*
*Entonces el mapeo $\Lambda \colon A_n \to S_n \setminus A_n$, definido medianta la regla*

$$\Lambda(\varphi) = \varphi\psi,$$

*es una biyección del conjunto $A_n$ sobre $S_n \setminus A_n$.*

# Determinante es una función alternante de sus filas

## Demostración del teorema.

En la definición del determinante dividamos la suma en dos partes:

$$\det(A) = \sum_{\varphi \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)} - \sum_{\chi \in S_n \setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\chi(i)}.$$

# Determinante es una función alternante de sus filas

## Demostración del teorema.

En la definición del determinante dividamos la suma en dos partes:

$$\det(A) = \sum_{\varphi \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)} - \sum_{\chi \in S_n \setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\chi(i)}.$$

Usando el lema, en la segunda suma hagamos el cambio $\chi = \varphi\tau_{p,q}$.
Apartemos el $p$-ésimo y $q$-ésimo factor, saquemos múltiplos comunes:

$$\det(A) = \sum_{\varphi \in A_n} a_{p,\varphi(p)} a_{q,\varphi(q)} \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)} - \sum_{\varphi \in A_n} a_{p,\varphi(q)} a_{q,\varphi(p)} \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)}$$

$$= \sum_{\varphi \in A_n} \left( a_{p,\varphi(p)} a_{q,\varphi(q)} - a_{p,\varphi(q)} a_{q,\varphi(p)} \right) \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)} = 0.$$

# Determinante es una función alternante de sus filas

## Demostración del teorema.

En la definición del determinante dividamos la suma en dos partes:

$$\det(A) = \sum_{\varphi \in A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\varphi(i)} - \sum_{\chi \in S_n \setminus A_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\chi(i)}.$$

Usando el lema, en la segunda suma hagamos el cambio $\chi = \varphi\tau_{p,q}$.
Apartemos el $p$-ésimo y $q$-ésimo factor, saquemos múltiplos comunes:

$$\det(A) = \sum_{\varphi \in A_n} a_{p,\varphi(p)} a_{q,\varphi(q)} \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)} - \sum_{\varphi \in A_n} a_{p,\varphi(q)} a_{q,\varphi(p)} \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)}$$

$$= \sum_{\varphi \in A_n} \Big( a_{p,\varphi(p)} a_{q,\varphi(q)} - a_{p,\varphi(q)} a_{q,\varphi(p)} \Big) \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \ne p, i \ne q}} a_{i,\varphi(i)} = 0.$$

En el último paso se usa que $a_{p,j} = a_{q,j}$ para todo $j$. □

# Contenido

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Teorema

*Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con una base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ y sea $f\colon V^n \to \mathbb{F}$ una forma n-lineal alternante.*
*Entonces para todos $a_1, \ldots, a_n \in V$ se cumple la igualdad*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \det(C)\, f(b_1, \ldots, b_n),$$

*donde $C$ es la matriz formada de las columnas de coordenadas de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ respecto la base $\mathcal{B}$:*

$$C = \big[(a_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (a_n)_{\mathcal{B}}\big].$$

# Demostración para $n = 2$

Supongamos que

$$a_1 = c_{1,1} b_1 + c_{2,1} b_2; \qquad a_1 = c_{1,2} b_1 + c_{2,2} b_2.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2) &= f(c_{1,1} b_1 + c_{2,1} b_2,\ c_{1,2} b_1 + c_{2,2} b_2) \\ &= c_{1,1} c_{1,2}\, f(b_1, b_1) + c_{1,1} c_{2,2}\, f(b_1, b_2) \\ &\qquad + c_{2,1} c_{1,2}\, f(b_2, b_1) + c_{2,1} c_{2,2}\, f(b_2, b_2) \\ &= (c_{1,1} c_{2,2} - c_{2,1} c_{1,2})\, f(b_1, b_2) \\ &= \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} \\ c_{2,1} & c_{2,2} \end{vmatrix} f(b_1, b_2). \end{aligned}$$

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Demostración (inicio)

Paso I. Primero aplicamos la hipótesis que $f$ es polilineal:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,n\}^n} c_{i_1,1} \cdots c_{i_n,n} f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}).$$

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Demostración (inicio)

Paso I. Primero aplicamos la hipótesis que $f$ es polilineal:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,n\}^n} c_{i_1,1} \cdots c_{i_n,n} f(b_{i_1}, \ldots, b_{i_n}).$$

Paso II. Como $f$ es alternante, $f(b_{i_1}, b_{i_2}, \ldots, b_{i_n}) = 0$ siempre y cuando algunos de los índices $i_1, \ldots, i_n$ coinciden.

Por eso sólo se queda la suma sobre todas las tuplas $(i_1, \ldots, i_n)$ tales que los índices $i_1, \ldots, i_n$ son distintos por pares, es decir, forman una permutación:

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\varphi\in S_n} c_{\varphi(1),1} \cdots c_{\varphi(n),n} f(b_{\varphi(1)}, \ldots, b_{\varphi(n)}).$$

...

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Demostración (fin).

$$f(a_1,\ldots,a_n)=\sum_{\varphi\in S_n} c_{\varphi(1),1}\cdots c_{\varphi(n),n}\, f(b_{\varphi(1)},\ldots,b_{\varphi(n)}).$$

Paso III. Como $f$ es alternante, $f$ es antisimétrica, y

$$f(b_{\varphi(1)},\ldots,b_{\varphi(n)})=\operatorname{sgn}(\varphi)f(b_1,\ldots,b_n).$$

Por eso

$$\begin{aligned} f(a_1,\ldots,a_n) &= f(b_1,\ldots,b_n)\sum_{\varphi\in S_n}\operatorname{sgn}(\varphi)\, c_{\varphi(1),1}\cdots c_{\varphi(n),n} \\ &= \det(C^\top)f(b_1,\ldots,b_n)=\det(C)f(b_1,\ldots,b_n). \end{aligned}$$

□

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Corolario

*Sea $D\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ una función polilineal por renglones y alternante por renglones. Entonces*

$$D(A) = \det(A)D(I_n) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}).$$

# Expresión de una forma $n$-lineal alternante arbitraria a través del determinante

## Corolario

*Sea $D\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ una función polilineal por renglones y alternante por renglones. Entonces*

$$D(A) = \det(A)D(I_n) \qquad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}).$$

## Corolario

*La función determinante es la única función $\mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ que cumple las siguientes tres propiedades al mismo tiempo:*

1. *es polilineal por renglones;*
2. *es alternante por renglones;*
3. *toma valor 1 en la matriz identidad $I_n$.*