Definición del determinante

Egor Maximenko

ESFM del IPN

3 de febrero de 2013

Contenido

Contenido

Signo de una permutación (repaso)

Si φ es igual al producto de k transposiciones, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi) =$$

Signo de una permutación (repaso)

Si φ es igual al producto de k transposiciones, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^k.$$

Signo de una permutación (repaso)

Si φ es igual al producto de k transposiciones, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^k.$$

El signo del producto de dos permutaciones se expresa a través de los signos de los factores mediante la fórmula:

$$\operatorname{sgn}(\varphi\psi) =$$

Signo de una permutación (repaso)

Si φ es igual al producto de k transposiciones, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^k.$$

El signo del producto de dos permutaciones se expresa a través de los signos de los factores mediante la fórmula:

$$\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = \operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\psi).$$

Signo de una permutación (repaso)

El signo de la permutación identidad es

Signo de una permutación (repaso)

El signo de la permutación identidad es 1.
En otras palabras, la permutación identidad es par.

Signo de una permutación (repaso)

El signo de la permutación identidad es 1.
En otras palabras, la permutación identidad es par.

¿Cuál es la relación entre $\operatorname{sgn}(\varphi^{-1})$ y $\operatorname{sgn}(\varphi)$?

$$\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) =$$

Signo de una permutación (repaso)

El signo de la permutación identidad es 1.
En otras palabras, la permutación identidad es par.

¿Cuál es la relación entre $\operatorname{sgn}(\varphi^{-1})$ y $\operatorname{sgn}(\varphi)$?

$$\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi).$$

Los signos de φ y φ^{-1} siempre coinciden.

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es -1.
En otras palabras, todas las transposiciones son permutaciones

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es -1.
En otras palabras, todas las transposiciones son permutaciones impares.

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es -1.
En otras palabras, todas las transposiciones son permutaciones impares.

Si φ es una permutación y τ es una transposición, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi\tau) =$$

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es -1.
En otras palabras, todas las transposiciones son permutaciones impares.

Si φ es una permutación y τ es una transposición, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi\tau) = -\operatorname{sgn}(\varphi)$$

y

$$\operatorname{sgn}(\tau\varphi) =$$

Signo de una permutación (repaso)

El signo de cualquier transposición es -1.
En otras palabras, todas las transposiciones son permutaciones impares.

Si φ es una permutación y τ es una transposición, entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi\tau) = -\operatorname{sgn}(\varphi)$$

y

$$\operatorname{sgn}(\tau\varphi) = -\operatorname{sgn}(\varphi),$$

esto es, la multiplicación por una transposición cambia el signo.

Contenido

Definición del determinante

Definición (determinante de una matriz)

Sea A una matriz cuadrada de orden n:

$$A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Definimos el determinante de A por medio de la siguiente suma:

$$\det(A) := \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) A_{1,\varphi(1)} A_{2,\varphi(2)} \cdots A_{n,\varphi(n)}.$$

Sumatoria sobre todas las permutaciones

La sumatoria es sobre todas las permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, n\}$, esto es, a cada permutación $\varphi \in S_n$ le corresponde su propio sumando. El número de sumandos es $n!$.

Definición del determinante

Estructura de cada término del determinante

Consideremos el sumando ó término del determinante correspondiente a una permutación φ:

$$\operatorname{sgn}(\varphi) A_{1,\varphi(1)} A_{2,\varphi(2)} \cdots A_{n,\varphi(n)}, \quad \text{más brevemente,} \quad \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\varphi(i)}.$$

Los índices de filas son $1, 2, \ldots, n$. Por eso:

> Cada término en la definición del determinante contiene exactamente un factor de cada fila de la matriz.

Los índices de columnas $\varphi(1), \varphi(2), \ldots, \varphi(n)$ forman una permutación del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto:

> Cada término en la definición del determinante contiene exactamente un factor de cada columna de la matriz.

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(1) = 3 \quad \Rightarrow$ de la primera fila tomamos el tercer elemento

$$A_{1,3}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(2) = 2 \quad \Rightarrow \quad$ de la segunda fila tomamos el segundo elemento

$$A_{1,3}A_{2,2}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(3) = 4 \quad \Rightarrow \quad$ de la tercera fila tomamos el cuarto elemento

$$A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(4) = 1 \quad \Rightarrow \quad$ de la cuarta fila tomamos el primer elemento

$$A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1}.$$

Definición del determinante

Ejemplo (Uno de los sumandos del determinante de tamaño 4)

Consideremos una matriz de tamaño 4:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Escribamos el término del determinante, que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al fin, vemos que $\varphi = \mathrm{c}(1, 3, 4)$, $\mathrm{d}(\varphi) = 2$ y $\mathrm{sgn}(\varphi) = (-1)^2 = 1$.

$$+ A_{1,3}A_{2,2}A_{3,4}A_{4,1}.$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{1,4}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{1,4}A_{2,3}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & A_{4,2} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2}.$$

Definición del determinante

Ejemplo (Otro sumando del determinante de tamaño 4)

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \color{red}{A_{1,4}} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \color{red}{A_{2,3}} & A_{2,4} \\ \color{red}{A_{3,1}} & A_{3,2} & A_{3,3} & A_{3,4} \\ A_{4,1} & \color{red}{A_{4,2}} & A_{4,3} & A_{4,4} \end{bmatrix}$$

Ahora escribamos el término del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\varphi = \mathrm{c}(1, 4, 2, 3)$, $\mathrm{d}(\varphi) = 3$ y $\operatorname{sgn}(\varphi) = -1$.

$$-A_{1,4}A_{2,3}A_{3,1}A_{4,2}.$$

Definición del determinante

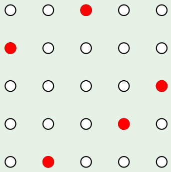
Ejemplo (Un sumando del determinante de tamaño 5)

Para una matriz de tamaño 5, escribamos el sumando del determinante que corresponde a la permutación $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Definición del determinante

Ejemplo (Un sumando del determinante de tamaño 5)

Para una matriz de tamaño 5, escribamos el sumando del determinante que corresponde a la permutación $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

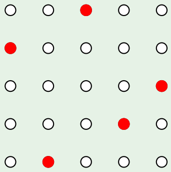


Eligimos los componentes correspondientes de la matriz.

Definición del determinante

Ejemplo (Un sumando del determinante de tamaño 5)

Para una matriz de tamaño 5, escribamos el sumando del determinante que corresponde a la permutación $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.



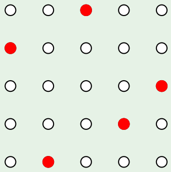
$$\operatorname{sgn}(\varphi) = -1$$

Calculamos el signo de la permutación.

Definición del determinante

Ejemplo (Un sumando del determinante de tamaño 5)

Para una matriz de tamaño 5, escribamos el sumando del determinante que corresponde a la permutación $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.



$$\operatorname{sgn}(\varphi) = -1$$

$$-A_{1,3}A_{2,1}A_{3,5}A_{4,4}A_{5,2}.$$

Escribimos la respuesta.

Definición del determinante

Ejercicios

Ejercicio

Para una matriz de orden 5, escribir el sumando del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

Para una matriz de orden 4, escribir el sumando del determinante que corresponde a la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Contenido

Determinante de tamaño 1

Veamos cómo se aplica la definición general al caso trivial $n = 1$.
Calculemos el determinante de la matriz de tamaño $n = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} \end{bmatrix}.$$

Determinante de tamaño 1

Veamos cómo se aplica la definición general al caso trivial $n = 1$.
Calculemos el determinante de la matriz de tamaño $n = 1$:

$$A = \left[\begin{array}{c} A_{1,1} \end{array} \right].$$

El conjunto S_1 consiste en una sóla permutación, ya que $1! = 1$.

Determinante de tamaño 1

Veamos cómo se aplica la definición general al caso trivial $n = 1$.
Calculemos el determinante de la matriz de tamaño $n = 1$:

$$A = \left[\begin{array}{c} A_{1,1} \end{array} \right].$$

El conjunto S_1 consiste en una sóla permutación, ya que $1! = 1$.
Escribimos esta permutación y el sumando correspondiente:

$$\varphi = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \mathrm{sgn}(\varphi) = 1 \qquad \mapsto \qquad A_{1,1}.$$

Determinante de tamaño 1

Veamos cómo se aplica la definición general al caso trivial $n = 1$.
Calculemos el determinante de la matriz de tamaño $n = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_1 consiste en una sóla permutación, ya que $1! = 1$.
Escribimos esta permutación y el sumando correspondiente:

$$\varphi = \mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \operatorname{sgn}(\varphi) = 1 \qquad \mapsto \qquad A_{1,1}.$$

Por eso

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} \end{bmatrix} = A_{1,1}.$$

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_2 consiste en dos permutaciones $(2! = 2)$.

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_2 consiste en dos permutaciones $(2! = 2)$.
Escribamos estas permutaciones, sus signos y sumandos correspondientes:

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_2 consiste en dos permutaciones $(2! = 2)$.
Escribamos estas permutaciones, sus signos y sumandos correspondientes:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sgn}(\varphi) = 1 \qquad \mapsto \qquad A_{1,1}A_{2,2};$$

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_2 consiste en dos permutaciones $(2! = 2)$.
Escribamos estas permutaciones, sus signos y sumandos correspondientes:

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sgn}(\varphi) = 1 \qquad \mapsto \qquad A_{1,1}A_{2,2};$$

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{sgn}(\varphi) = -1 \qquad \mapsto \qquad -A_{1,2}A_{2,1}.$$

Determinante de tamaño 2

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

El conjunto S_2 consiste en dos permutaciones ($2! = 2$).
Escribamos estas permutaciones, sus signos y sumandos correspondientes:

$$\begin{array}{llll} \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \operatorname{sgn}(\varphi) = 1 & \mapsto & A_{1,1}A_{2,2}; \\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \operatorname{sgn}(\varphi) = -1 & \mapsto & -A_{1,2}A_{2,1}. \end{array}$$

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} = A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1}.$$

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} =$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1$$

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 21 - 2 = 19.$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 21 - 2 = 19.$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} =$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 21 - 2 = 19.$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-4)$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 21 - 2 = 19.$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-4) - (-2) \cdot 5$$

Determinantes de tamaño 2

Ejemplos

En vez de $\det(A)$ también se escribe $|A|$.

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 21 - 2 = 19.$$

Ejemplo

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-4) - (-2) \cdot 5 = -28 + 10 = -18.$$

Determinantes de tamaño 2

Ejercicios

Ejercicio

$$\begin{vmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

Ejercicio

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

Ejercicio

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} =$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} =$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} =$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos
y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} \color{red}{A_{1,1}} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & \color{red}{A_{2,2}} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & \color{red}{A_{3,3}} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} \color{red}{A_{1,1}} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \color{red}{A_{2,3}} \\ A_{3,1} & \color{red}{A_{3,2}} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & \color{red}{A_{1,2}} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \color{red}{A_{2,3}} \\ \color{red}{A_{3,1}} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} \\ & + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \end{aligned}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1$$

Determinante de tamaño 3

Calculemos el determinante de una matriz de tamaño $n = 3$:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} \\ & + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}. \end{aligned}$$

S_3 contiene $3! = 6$ permutaciones. Calculamos sus signos y escribimos los correspondientes sumandos del determinante.

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = -1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -1 \qquad \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} =$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} =$$

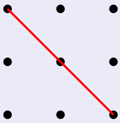
Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \qquad A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

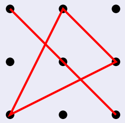


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \qquad A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

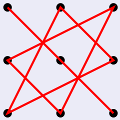


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \quad A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

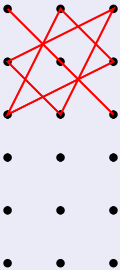


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \qquad A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:

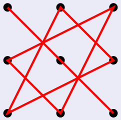


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

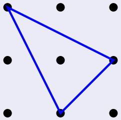
Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} \quad A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} \end{array}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

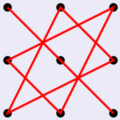


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

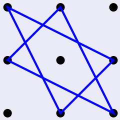
Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} &A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ &- A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} \end{aligned}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

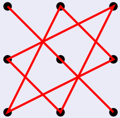


$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

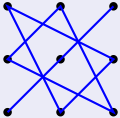
Determinante de tamaño 3 (fórmula de Sarrus)

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{aligned} & A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} \\ & - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}. \end{aligned}$$

Para memorizar mejor la fórmula para el determinante de tamaño 3 escribimos por separado las permutaciones pares e impares:



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de determinantes de tamaño tres

Ejercicios

Usando la fórmula de Sarrus, calcule los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

Contenido

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$.

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$*.*

Demostración.

$$\det(A^\top) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi(i),i}$$

por la definición de la matriz transpuesta

$\square$

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$.

Demostración.

$$\det(A^\top) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi(i),i} \qquad \begin{bmatrix} k = \varphi(i) \\ i = \varphi^{-1}(k) \end{bmatrix}$$

cambiamos el índice en el producto (φ es una biyección)

$\square$

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$.

Demostración.

$$\det(A^\top) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi(i),i} \qquad \left[\begin{array}{c} k = \varphi(i) \\ i = \varphi^{-1}(k) \end{array} \right]$$

$$= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) \prod_{k=1}^{n} A_{k,\varphi^{-1}(k)}$$

$\square$

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$*. Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\det(A^\top) &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi(i),i} \qquad \left[\begin{array}{c} k = \varphi(i) \\ i = \varphi^{-1}(k) \end{array}\right] \\
&= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) \prod_{k=1}^{n} A_{k,\varphi^{-1}(k)} \qquad \left[\psi = \varphi^{-1}\right]
\end{aligned}$$

cambiamos el índice en la sumatoria ($\varphi \mapsto \varphi^{-1}$ es una biyección)

$\square$

Determinante de la matriz transpuesta

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. *Entonces* $\det(A^\top) = \det(A)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\det(A^\top) &= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{i=1}^{n} A_{\varphi(i),i} && \left[\begin{array}{c} k = \varphi(i) \\ i = \varphi^{-1}(k) \end{array}\right] \\
&= \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) \prod_{k=1}^{n} A_{k,\varphi^{-1}(k)} && \left[\psi = \varphi^{-1}\right] \\
&= \sum_{\psi \in S_n} \operatorname{sgn}(\psi) \prod_{k=1}^{n} A_{k,\psi(k)} = \det(A).
\end{aligned}$$

□

Contenido

Determinante de una matriz diagonal

Una matriz $A = \left[A_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}$ se llama matriz diagonal si todas sus entradas fuera de la diagonal principal son iguales a cero:

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad \Big(i \neq j \quad \Longrightarrow \quad A_{i,j} = 0\Big).$$

Teorema (determinante de una matriz diagonal)

El determinante de una matriz diagonal es igual al producto de sus entradas diagonales:

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_{2,2} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & A_{3,3} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

Determinante de una matriz diagonal

$$\det\bigl(\operatorname{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{n,n})\bigr) = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

Demostración.

1. Notemos que a la permutación identidad $\operatorname{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

Determinante de una matriz diagonal

$$\det\bigl(\operatorname{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{n,n})\bigr) = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

Demostración.

1. Notemos que a la permutación identidad $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

2. Vamos a mostrar que los demás sumandos del determinante son 0. Usaremos la hipótesis que A es diagonal: $A_{i,j} = 0$ siempre que $i \neq j$.

Determinante de una matriz diagonal

$$\det\bigl(\operatorname{diag}(A_{1,1}, A_{2,2}, \ldots, A_{n,n})\bigr) = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

Demostración.

1. Notemos que a la permutación identidad $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

2. Vamos a mostrar que los demás sumandos del determinante son 0. Usaremos la hipótesis que A es diagonal: $A_{i,j} = 0$ siempre que $i \neq j$.

Sea $\varphi \in S_n$ y $\varphi \neq \mathrm{id}$. Entonces existe i tal que $\varphi(i) \neq i$.
(En efecto, si $\varphi(i) = i$ para todos i, entonces $\varphi = \mathrm{id}$.)
Para este índice i se cumple $A_{i,\varphi(i)} = 0$,
y el sumando correspondiente a φ es cero. □

Determinante de una matriz triangular superior

Una matriz $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$ se llama triangular superior si todas sus entradas por debajo de la diagonal principal son cero:

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \quad (i > j \quad \Longrightarrow \quad A_{i,j} = 0) .$$

Determinante de una matriz triangular superior

Una matriz $A = [A_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$ se llama triangular superior si todas sus entradas por debajo de la diagonal principal son cero:

$$\forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \quad \left(i > j \quad \Longrightarrow \quad A_{i,j} = 0\right).$$

Teorema (determinante de una matriz triangular superior)

El determinante de una matriz triangular superior es el producto de sus entradas diagonales:

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \ldots & A_{1,n} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & \ldots & A_{2,n} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & \ldots & A_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} = A_{1,1}A_{2,2}\cdots A_{n,n}.$$

Determinante de una matriz triangular superior

Para demostrar el teorema necesitamos un lema.

Lema

Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq \mathrm{id}$. *Entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $i > \varphi(i)$.

Determinante de una matriz triangular superior

Para demostrar el teorema necesitamos un lema.

Lema

Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq \mathrm{id}$. *Entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $i > \varphi(i)$.

Demostración del lema.

Razonando por constraposición supongamos que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \varphi(i) \geq i.$$

Determinante de una matriz triangular superior

Para demostrar el teorema necesitamos un lema.

Lema

Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq \mathrm{id}$. *Entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $i > \varphi(i)$.

Demostración del lema.

Razonando por constraposición supongamos que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \varphi(i) \geq i.$$

$$\varphi(n) \geq n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(n) = n.$$

Determinante de una matriz triangular superior

Para demostrar el teorema necesitamos un lema.

Lema

Sea $\varphi \in S_n$, $\varphi \neq \mathrm{id}$. *Entonces existe* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $i > \varphi(i)$.

Demostración del lema.

Razonando por constraposición supongamos que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad \varphi(i) \geq i.$$

$\varphi(n) \geq n \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(n) = n.$

$\varphi(n-1) \geq n-1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(n-1) \in \{n-1, n\}.$

Como φ es inyectiva y el valor n ya está ocupado, $\varphi(n-1) = n-1$.

...

Continuando de esta manera obtenemos que $\varphi(i) = i$ para todo i,
lo cual significa que φ es la permutación identidad. Contradicción. $\square$

Determinante de una matriz triangular superior

Demostración del teorema.

1. Notemos que a la permutación identidad $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

Determinante de una matriz triangular superior

Demostración del teorema.

1. Notemos que a la permutación identidad $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

2. Vamos a mostrar que todos los demás sumandos del determinante contienen factores nulos y por eso son iguales a cero.
Usaremos la hipótesis del teorema que A es triangular superior,
esto es, $A_{i,j} = 0$ siempre que $i > j$.

Determinante de una matriz triangular superior

Demostración del teorema.

1. Notemos que a la permutación identidad $\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix}$ le corresponde el producto de las entradas diagonales.

2. Vamos a mostrar que todos los demás sumandos del determinante contienen factores nulos y por eso son iguales a cero.
Usaremos la hipótesis del teorema que A es triangular superior, esto es, $A_{i,j} = 0$ siempre que $i > j$.

Sea $\varphi \in S_n$ y $\varphi \neq \mathrm{id}$. Por el lema, $\varphi(i) < i$ para algún i.
Para este índice i se cumple que $A_{i,\varphi(i)} = 0$,
y el sumando correspondiente a φ es cero. $\square$

Determinante de una matriz triangular inferior

Definición

Una matriz se llama triangular inferior si todos sus componentes por arriba de la diagonal principal son ceros.

Teorema

El determinante de una matriz triangular inferior es el producto de sus entradas diagonales.

Ejercicio

Demuestre este teorema usando la manera de la demostración del teorema anterior (sobre el determinante de una matriz triangular superior).

Ejercicio

Demuestre este teorema usando el resultado del teorema anterior
y el teorema sobre el determinante de la matriz transpuesta.

Determinante de una matriz cuyas entradas por arriba de la antidiagonal principal son cero

Ejercicio

Calcular $\operatorname{sgn}(\varphi)$ para

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinante de una matriz cuyas entradas por arriba de la antidiagonal principal son cero

Ejercicio

Calcular $\operatorname{sgn}(\varphi)$ para

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ n & n-1 & \ldots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio

Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & A_{1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & A_{2,n-1} & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & A_{n-1,2} & \ldots & A_{n-1,n-1} & A_{n-1,n} \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix}.$$