Menores y cofactores.
Expansión del determinante por cofactores

Objetivos. Definir menores y cofactores de una matriz, demostrar la fórmula de expansión por cofactores.

Requisitos. Definición y propiedades básicas del determinante de una matriz cuadrada.

Menores y cofactores

1. Motivación del concepto de cofactor. El determinante de tercer orden se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la primera fila, y los coeficientes correspondientes son determinantes de segundo orden con ciertos signos:

$$\det\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= A_{1,1}(A_{2,2}A_{3,3} - A_{2,3}A_{3,2}) - A_{1,2}(A_{2,1}A_{3,3} - A_{2,3}A_{3,1}) + A_{1,3}(A_{2,1}A_{3,2} - A_{2,2}A_{3,1}) \\ &= A_{1,1}\begin{vmatrix} A_{2,2} & A_{2,3} \\ A_{3,2} & A_{3,3} \end{vmatrix} + A_{1,2}\left(-\begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{2,3} \\ A_{3,1} & A_{3,3} \end{vmatrix}\right) + A_{1,3}\begin{vmatrix} A_{2,1} & A_{3,2} \\ A_{3,1} & A_{3,2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vemos que $\det(A)$ se puede expandir en una suma de productos: las entradas de la primera fila se multiplican por ciertos *cofactores*. Vamos a establecer una fórmula similar para el caso general.

2. Definición (menor de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le m$, $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_r \le n$. El *menor* de rango r de la matriz A, correspondiente a las filas $i_1, \ldots, i_r$ y las columnas $j_1, \ldots, j_r$, se define como el determinante de la submatriz $A_{\{i_1,\ldots,i_r\},\{j_1,\ldots,j_r\}}$ y se denota por $M_A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_r \end{pmatrix}$.

3. Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces $M_A\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -7.$

4. Definición (cofactor). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. El *cofactor* (o el *adjunto*) de la entrada (p, q) de la matriz A se define como el menor correspondiente a las filas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$ y las columnas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$, multiplicado por $(-1)^{p+q}$. Lo denotamos por $\widehat{A}_{p,q}$:

$$\widehat{A}_{p,q} := (-1)^{p+q} M_A \begin{pmatrix} 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n \\ 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Recordamos que $M_A \begin{pmatrix} 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, n \\ 1, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n \end{pmatrix}$ es el determinante de la matriz obtenida al eliminar la fila p y la columna q de A, así que

$$\widehat{A}_{p,q} = (-1)^{p+q} \det \left(A_{\{1,\ldots,n\}\setminus\{p\},\{1,\ldots,n\}\setminus\{q\}} \right).$$

5. Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\widehat{A}_{2,3} = \det \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = -37.$$

6. Nota sobre la notación. En muchos libros la (i, j)-ésima entrada de la matriz A se denota por $a_{i,j}$ y su cofactor se denota por $A_{i,j}$. En estos apuntos usamos la notación $A_{i,j}$ para la (i, j)-ésima entrada de A y por eso introducimos otra notación (no estándar) para los cofactores.

7. Observación muy importante: el cofactor de la entrada (i, j) no depende del valor de la entrada A. Por definición, el cofactor de la entrada (i, j) se calcula usando las entradas de A ubicadas en las filas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{p\}$ y en las columnas $\{1, \ldots, n\} \setminus \{n\}$. Esto implica que el cofactor **no depende del valor de la entrada (i, j)**. Más aún, el cofactor de la entrada (i, j) no depende de la i-ésima fila ni de la j-ésima columna de A. Por ejemplo, las siguientes dos matrices A y B tienen el mismo cofactor $(1, 3)$:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 7 & 8 & -5 \\ 1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -7 & -9 & 5 \\ 7 & 8 & 0 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}, \quad \widehat{A}_{1,3} = \widehat{B}_{1,3} = \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -36.$$

8. Lema (determinante de una matriz con la primera fila casi nula). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $q \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que $a_{1,q} = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$. Entonces

$$\det(A) = A_{1,q} \widehat{A}_{1,q}.$$

Demostración. Usando $q - 1$ transposiciones de columnas, desplacemos el elemento $(1, q)$ a la posición $(1, 1)$. Formalmente, consideremos la matriz B que se obtiene de A al aplicar las operaciones elementales:

$$C_q \leftrightarrow C_{q-1}, \quad C_{q-1} \leftrightarrow C_{q-2}, \quad \ldots \quad , \quad C_2 \leftrightarrow C_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &B_{*,1} = A_{*,q}, \\ &B_{*,k} = A_{*,k-1} \quad \text{cuando } k \leq q; \\ &B_{*,k} = A_{*,k} \quad \text{cuando } k > q. \end{aligned}$$

Como sabemos,

$$\det(B) = B_{1,1} \cdot M_B \begin{pmatrix} 2 & \ldots & n \\ 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

De aquí

$$\det(A) = (-1)^{q-1} A_{1,q} \cdot M_A \begin{pmatrix} 2, \ldots, n \\ \{1, \ldots, n\} \setminus q \end{pmatrix} = A_{1,q} \cdot \widehat{A}_{1,q}. \qquad \square$$

9. Lema (determinante de una matriz con una fila casi nula). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$. Supongamos que $a_{p,k} = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\}$. Entonces

$$\det(A) = A_{p,q} \widehat{A}_{p,q}.$$

Demostración. Usando $p-1$ transposiciones de filas y $q-1$ transposiciones de columnas, desplacemos el elemento (p, q) a la posición $(1, q)$. Formalmente, consideremos la matriz B que se obtiene de A al aplicar las operaciones elementales:

$$R_p \leftrightarrow R_{p-1}, \quad R_{p-1} \leftrightarrow R_{p-2}, \quad \ldots \quad , \quad R_2 \leftrightarrow R_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &B_{1,*} = A_{p,*}; \\ &B_{k,*} = A_{k-1,*} \quad \text{cuando} \quad k \leq p; \\ &B_{k,*} = A_{k,*} \quad \text{cuand} \quad k > p. \end{aligned}$$

A la matriz B apliquemos el lema anterior:

$$\det(B) = B_{1,q} (-1)^{q-1} M_B \begin{pmatrix} 2, \ldots, n \\ \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\} \end{pmatrix}.$$

Usando que $\det(A) = (-1)^{p-1} \det(B)$, tenemos:

$$\det(A) = A_{p,q} (-1)^{p+q-2} M_A \begin{pmatrix} \{1, \ldots, n\} \setminus \{p\} \\ \{1, \ldots, n\} \setminus \{q\} \end{pmatrix} = A_{p,q} \widehat{A}_{p,q}. \qquad \square$$

10. Teorema (expansión del determinante por cofactores). Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$, $p \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} \widehat{A}_{p,k}; \tag{1}$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,p} \widehat{A}_{k,p}. \tag{2}$$

11. Nota. La fórmula (1) se llama *expansión del determinante por cofactores a lo largo del p-ésimo renglón*. La fórmula (2) se llama *expansión del determinante por cofactores a lo largo de la q-ésima columna*.

Demostración. Podemos escribir la p-ésima fila de A en forma

$$A_{p,*} = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} e_k.$$

Usemos la linealidad del determinante con respecto a la p-ésima fila:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Det}(A_{1,*}, \ldots, A_{p-1,*}, A_{p,k} e_k, A_{p+1,*}, \ldots, A_{n,*}).$$

A cada sumando apliquemos el lema anterior:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{p,k} \widehat{A}_{p,k}. \qquad \square$$

12. Ejemplo. Calcule el siguiente determinante al expanderlo en la segunda fila; en la segunda columna:

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

13. Ejemplo. Calcule los determinantes usando las operaciones elementales y la expansión en filas o columnas casi nulas:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & -2 & -3 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

14. Ejercicio. Calcule los determinantes usando varios métodos:

$$\det \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$