Determinante de una matriz triangular superior por bloques

Objetivos. Demostrar que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right] = \det(A)\det(C),$$

donde A, B, C son cualesquiera matrices de tamaños compatibles.

Requisitos. El determinante considerado como una función de n argumentos (de los renglones o de las columnas) es n-lineal y alternante. Cualquier función n-lineal alternante se expresa de cierta manera a través de la función determinante.

1. Determinante considerado como una función de n columnas de la matriz (repaso). Denotamos por $\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n)$ el determinante de la matriz formada de las columnas $c_1, \ldots, c_n$:

$$\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n) \coloneqq \det\big[(c_j)_i\big]_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} | & & | \\ c_1 & \ldots & c_n \\ | & & | \end{vmatrix}.$$

Por el teorema sobre el determinante de la matriz transpuesta, es lo mismo que el determinante de la matriz formada de los renglones $c_1^\top, \ldots, c_n^\top$:

$$\operatorname{Det}(c_1, \ldots, c_n) \coloneqq \det\big[(c_i)_j\big]_{i,j=1}^n = \begin{vmatrix} - & c_1^\top & - \\ & \ldots & \\ - & c_n^\top & - \end{vmatrix}.$$

Ya sabemos que la función Det es n-lineal y alternante.

2. Teorema sobre la expresión de una función n-lineal alternante $(\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ a través de la función determinante (repaso). Sea $f\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ una función n-lineal alternante y sean $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{F}^n$. Entonces

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \operatorname{Det}(v_1, \ldots, v_n) f(e_1, \ldots, e_n).$$

3. Teorema (determinante de una matriz triangular superior por bloques). Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & C \end{array}\right] = \det(A)\det(C). \tag{1}$$

Demostración. Primer paso. Consideremos la función $f\colon (\mathbb{F}^m)^m \to \mathbb{F}$,

$$f(a_1,\ldots,a_m) \coloneqq \det \left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & \ldots & a_m & B \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{0}_{\times n,m}} & C \end{array}\right].$$

Se puede demostrar que f es m-lineal y alternante (tarea adicional). Por eso

$$f(a_1,\ldots,a_m) = \operatorname{Det}(a_1,\ldots,a_m) f(e_1,\ldots,e_m).$$

Poniendo las columnas de A en lugar de los vectores $a_1,\ldots,a_m$ y escribiendo $f(e_1,\ldots,e_m)$ de manera explícita obtenemos que

$$\det \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & C \end{array}\right] = \det(A) \det \left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & C \end{array}\right]. \tag{2}$$

Segundo paso. Consideremos la función $g\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$,

$$g(c_1,\ldots,c_n) \coloneqq \det \left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline & c_1 \\ \mathbf{0}_{\times n,m} & \ldots \\ & c_n \end{array}\right].$$

Se puede demostrar que g es n-lineal y alternante (tarea adicional). Por lo tanto,

$$g(c_1,\ldots,c_n) = \operatorname{Det}(c_1,\ldots,c_n) g(e_1,\ldots,e_n) = \operatorname{Det}(c_1,\ldots,c_n) \det \left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline & e_1 \\ \mathbf{0}_{\times n,m} & \ldots \\ & e_n \end{array}\right].$$

Poniendo los renglones de C en lugar de los vectores $c_1,\ldots,c_n$, obtenemos que

$$\left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & C \end{array}\right] = \det(C) \det \left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & I_n \end{array}\right]. \tag{3}$$

El último factor es el determinante de una matriz triangular superior con elemento 1 en la diagonal principal. Consiguientemente, el último factor es 1:

$$\det \left[\begin{array}{c|c} I_m & B \\ \hline \mathbf{0}_{\times n,m} & I_n \end{array}\right] = 1. \tag{4}$$

Al aplicar las fórmulas (2), (3) y (4), como resultado obtenemos la fórmula (1). $\square$

4. Ejemplo. Calcular el determinante

$$\det \begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Corolario (determinante de una matriz triangular inferior por bloques). Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{F})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{F})$, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces

$$\det \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \det(A)\det(C). \tag{5}$$

6. Corolario. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que $A_{1,k} = 0$ para todo $k \in \{2, \ldots, n\}$. Entonces

$$\det(A) = A_{1,1} \cdot \det(A_{\{2,\ldots,n\},\{2,\ldots,n\}}),$$

esto es,

$$\det \begin{bmatrix} A_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix} = A_{1,1} \cdot \det \begin{bmatrix} A_{2,2} & \ldots & A_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,2} & \ldots & A_{n,n} \end{bmatrix}.$$

7. Ejemplo. Calculemos el siguiente determinante usando operaciones elementales de columnas ($C_2 += 2C_1$, $C_3 += -3C_1$) y el corolario anterior:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 3 & 1 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -14 \\ 3 & 9 & -7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 7 & -14 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = 14 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = 14 \cdot 11 = 154.$$