Determinante como volumen orientado

Área orientada de un paralelogramo en el plano

1. En esta sección identifiquemos el plano euclideano $V^2(O)$ con $\mathbb{R}^2$. Más formalmente, esto significa que en $V^2(O)$ fijemos una base ortonormal $\mathcal{E} = (e_1, e_2) = (\overrightarrow{OE_1}, \overrightarrow{OE_2})$.

2. Definición (área orientada de un paralelogramo). Para cualesquiera vectores $v, w \in \mathbb{R}$ denotemos por $A(v, w)$ al área del paralelogramo generado por estos vectores, con el signo $+$ si el giro de v a w es en el sentido positivo (contra reloj) y con el signo $-$ si el giro de v a w es en el sentido negativo (sentido del reloj).

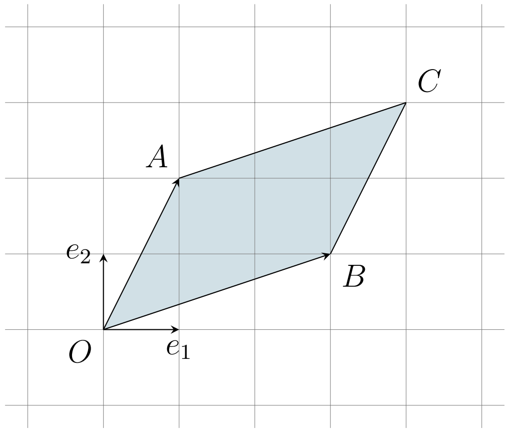
3. Proposición (propiedades del área orientada).

1. $A(v, v) = 0$.
2. $A(\lambda v, w) = \lambda A(v, w)$.
3. $A(v, w + \lambda v) = A(v, w)$.
4. $A(v, \lambda w) = \lambda A(v, w)$.
5. $A(v + \lambda w, w) = A(v, w)$.
6. $A(e_1, e_2) = 1$.

4. Tarea adicional (expresión del área orientada a través del determinante). Basándose en los resultados de la proposición anterior demuestre que la función A es bilineal y que para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^2$

$$A(u, v) = \operatorname{Det}(u, v) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}.$$

5. Ejemplo.



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\left(\overrightarrow{OA}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \left(\overrightarrow{OB}\right)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$$

6. Nota. De manera similar, el volumen orientado del paralelepípedo generado por algunos vectores $u, v, w \in V^3(O)$ es igual al determinante de la matriz formada los vectores columnas $u_{\mathcal{E}}, v_{\mathcal{E}}, w_{\mathcal{E}}$, donde $\mathcal{E}$ es una base ortonormal de $V^3(O)$.