Determinante y operaciones elementales

Objetivos. Estudiar qué pasa con el determinante de una matriz cuadrada cuando a la matriz se aplican operaciones elementales.

Requisitos. Funciones k-lineales, alternas y antisimétricas. Determinante como una forma n-lineal alternante de los renglones (o de las columnas).

1. Funciones n-lineales, alternantes y antisimétricas. Recordar las nociones correspondientes.

2. Proposición. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $f\colon V^k \to \mathbb{F}$ una forma n-lineal alternante. Entonces

$$f(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_q + \lambda a_p}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots) = f(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_q}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots). \tag{1}$$

Demostración. La función f es lineal respecto al q-ésimo argumento, por eso el lado izquierdo de la fórmula (1) es igual a la siguiente suma:

$$f(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_q}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots) + \lambda f(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots).$$

En el segundo sumando dos argumentos de f coinciden, y por la propiedad alternante de f este sumando es cero. $\square$

3. Ejemplo. Sea V un espacio vectorial real y sea $f\colon V^4 \to \mathbb{R}$ una forma 4-lineal alternante. Expresar $f(b, 2a + b, c + 3d, 5c + d)$ a través de $f(a, b, c, d)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
f(b, -2a + b, c + 3d, 5c + d) &= f(b, -2a, c + 3d, 5c + d) \\
&= -f(-2a, b, c + 3d, 5c + d) \\
&= 2f(a, b, c + 3d, 5c + d) \\
&= 2f(a, b, c + 3d, 5c) + 2f(a, b, c + 3d, d) \\
&= 10f(a, b, c + 3d, c) + 2f(a, b, c, d) \\
&= 10f(a, b, 3d, c) + 2f(a, b, c, d) \\
&= -30f(a, b, c, d) + 2f(a, b, c, d) \\
&= -28f(a, b, c, d).
\end{aligned}$$

$\square$

Determinante y operaciones elementales

4. Determinante como una forma n-lineal alternante (repaso). La función $\operatorname{Det}\colon (\mathbb{F}^n)^n \to \mathbb{F}$ es lineal respecto a cada uno de sus argumentos y es alternante. Por consecuencia, la función Det es antisimétrica.

5. Proposición (determinante y operaciones elementales). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$.

1. Si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$, $\lambda \in \mathbb{F}$, y la matriz B se obtiene de la matriz A al aplicar la operación elemental $R_q += \lambda R_p$, entonces los determinantes de A y B son iguales:
$$\text{si} \quad A \xrightarrow{R_q += \lambda R_p} B, \quad \text{entonces} \quad \det(B) = \det(A).$$
2. Si $p \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda \in \mathbb{F}$, $A \xrightarrow{R_p *= \lambda} B$, entonces $\det(B) = \lambda \det(A)$.
3. Si $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p \neq q$, $A \xrightarrow{R_p \leftrightarrow R_q}$, entonces $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración. En inciso 1 sigue de la Proposición 2. Para justificar el inciso 2 recordamos que la función Det es homogénea respecto al p-ésimo argumento:
$$\operatorname{Det}(\ldots, \underbrace{\lambda a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots) = \lambda \operatorname{Det}(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots).$$
Para justificar el inciso 3 recordamos que la función Det es antisimétrica:
$$\operatorname{Det}(\ldots, \underbrace{a_q}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots) = -\operatorname{Det}(\ldots, \underbrace{a_p}_{\substack{p\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots, \underbrace{a_q}_{\substack{q\text{-ésimo}\\ \text{arg.}}}, \ldots). \qquad \square$$

6. Ejemplo. Usando operaciones elementales y reduciendo las matrices a matrices triangularers superiores (o inferiores), calculemos los siguientes determinantes:
$$\det \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \det \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Ejemplo. Calculemos el determinante de la matriz
$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
y generalicemos el resultado al caso de tamaño arbitrario.

8. Ejercicio. Calcular los determinantes de las matrices

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C_4 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Elije tales métodos que se puedan generalizar para calcular $\det(A_5)$, $\det(B_5)$, $\det(C_5)$. Escriba las fórmulas generales para $\det(A_n)$, $\det(B_n)$, $\det(C_n)$.