Determinante de Vandermonde

Objetivos. Definir la matriz de Vandermonde y demostrar la fórmula para su determinante. Conocer su aplicación a la interpolación polinomial.

Requisitos. Determinante y sus propiedades, polinomios.

1. Definición (matriz de Vandermonde). Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. La *matriz de Vandermonde* generada por los puntos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ se define mediante la siguiente fórmula:

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_3^{n-1} \\ & & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

En notación breve:

$$V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) \coloneqq \left[\alpha_i^{j-1}\right]_{i,j=1}^{n}.$$

Las entradas de cada renglón forman una progresión geométrica.

2. Ejemplo (el determinante de Vandermonde para $n = 1$). En este caso la matriz de Vandermonde es de tamaño 1×1:

$$\det V(\alpha_1) = \left[1\right].$$

Su determinante es igual a 1 y no depende de α_1.

3. Ejemplo (el determinante de Vandermonde para $n = 2$).

$$\det V(\alpha_1, \alpha_2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

4. Ejemplo (el determinante de Vandermonde para $n = 3$).

$$\det V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix}.$$

Aplicamos operaciones elementales por columnas:

$$\det V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} \xlongequal[C_2 \mathrel{+}= -\alpha_3 C_1]{C_3 \mathrel{+}= -\alpha_3 C_2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1^2-\alpha_1\alpha_3 \\ 1 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_2^2-\alpha_2\alpha_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Luego expandimos a lo largo de la última fila:

$$\det V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_3 & \alpha_1(\alpha_1-\alpha_3) \\ \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_3) \end{vmatrix}.$$

De la primera fila factoricemos el factor común $\alpha_1 - \alpha_3$; de la segunda fila factoricemos el factor común $\alpha_2 - \alpha_3$:

$$\det V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_3) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix}.$$

El último determinante es $\det V(\alpha_1,\alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$. Cambiando los signos de los factores $\alpha_1 - \alpha_3$ y $\alpha_2 - \alpha_3$, obtenemos:

$$\det V(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2).$$

5. Teorema (fórmula para el determinante de Vandermonde).

$$\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Demostración. Por inducción. El caso degenerado $n = 1$ puede servirnos como una base de la inducción si aceptamos el convenio que el producto de los elementos de un conjunto vacío es igual a 1:

$$\det V(\alpha_1) = \det \left[\ 1\ \right] = 1 = \prod_{\emptyset} = \prod_{1\le i<j\le 1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Para $n = 2$ la fórmula también es correcta:

$$\det V(\alpha_1,\alpha_2) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1 = \prod_{1\le i<j\le 2} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Supongamos que la fórmula es cierta para $n - 1$ y la demostremos para n. Usamos la misma idea que vimos en el caso $n = 3$. Para eliminar todas las entradas del último renglón excepto la primera entrada realicemos las siguientes operaciones elementales con las columnas:

$$C_n \mathrel{+}= -\alpha_n C_{n-1}, \qquad \ldots \qquad , \qquad C_3 \mathrel{+}= -\alpha_n C_2, \qquad C_2 \mathrel{+}= -\alpha_n C_1.$$

Obtenemos el siguiente determinante:

$$\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1-\alpha_n & \alpha_1^2-\alpha_1\alpha_n & \ldots & \alpha_1^{n-1}-\alpha_1^{n-2}\alpha_n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \alpha_{n-1}-\alpha_n & \alpha_{n-1}^2-\alpha_{n-1}\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Expandamos el determinante a lo largo del último renglón:

$$\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \alpha_1-\alpha_n & \alpha_1^2-\alpha_1\alpha_n & \ldots & \alpha_1^{n-1}-\alpha_1^{n-2}\alpha_n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \alpha_{n-1}-\alpha_n & \alpha_{n-1}^2-\alpha_{n-1}\alpha_n & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-1}-\alpha_{n-1}^{n-2}\alpha_n \end{vmatrix}.$$

Para cada $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, del i-ésimo renglón factoricemos $\alpha_i - \alpha_n$:

$$\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = (-1)^2(-1)^{n-1} \prod_{1\le i\le n-1} (\alpha_i-\alpha_n) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-2} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-1}^2 & \ldots & \alpha_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Usando el factor $(-1)^{n-1}$ cambiemos los signos de los factores $\alpha_i - \alpha_n$, $i \in \{1,\ldots,n-1\}$, luego notemos que el último determinante es $V(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1})$. Podemos calcularlo usando la hipótesis de inducción:

$$\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \prod_{1\le i\le n-1} (\alpha_n-\alpha_i) \prod_{1\le i<j\le n-1} (\alpha_j-\alpha_i) = \prod_{1\le i<j\le n} (\alpha_j-\alpha_i). \qquad \square$$

6. Observación. La última igualdad en la demostración del teorema está basada en el hecho que los conjuntos

$$\big\{(i,j)\colon\ 1\le i<j\le n-1\big\} \qquad \text{y} \qquad \big\{(i,n)\colon\ 1\le i\le n-1\big\}$$

son disjuntos, y su unión es

$$\big\{(i,j)\colon\ 1\le i<j\le n\big\}.$$

Por ejemplo, para $n=4$:

$$\big\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\big\} = \big\{(1,2),(1,3),(2,3)\big\} \cup \big\{(1,4),(2,4),(3,4)\big\}.$$

7. Corolario (el determinante de Vandermonde con argumentos diferentes por pares es distinto de cero). Sean $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ diferentes por pares: $\alpha_i \ne \alpha_j$ si $i \ne j$. Entonces $\det V(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \ne 0$.

Aplicación a la interpolación polinomial

8. Teorema (existencia y unicidad del polinomio interpolante). Sea $\mathbb{F}$ un campo. Sean $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ elementos de $\mathbb{F}$ diferentes por pares y sean $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$. Entonces existe un único polinomio $P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$ tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Demostración. Busquemos P de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

Para que se cumplan las igualdades $P(\alpha_i) = \beta_i$ los coeficientes del polinomio deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} c_0 + c_1\alpha_0 + c_2\alpha_0^2 + \ldots + c_n\alpha_0^n = \beta_0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0 + c_1\alpha_n + c_2\alpha_n^2 + \ldots + c_n\alpha_n^n = \beta_n. \end{cases}$$

La matriz del sistema es la matriz de Vandermonde asociada a los puntos $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, esto es, la matriz $V(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Como $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ son diferentes por pares, su determinante es distinto de cero. Por el teorema de Cramer el sistema tiene una única solución. $\square$

9. Corolario (la igualdad de polinomios de grado $\le n$ en $n+1$ puntos implica la igualdad de sus coeficientes). Sean $P, Q \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Supongamos que $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son algunos puntos de $\mathbb{F}$ diferentes a pares, y

$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\} \qquad P(\alpha_k) = Q(\alpha_k).$$

Entonces $P = Q$, esto es, los coeficientes correspondientes de P y Q son iguales.

10. Corolario (la igualdad de los valores de polinomios en un conjunto infinito de puntos implica la igualdad de sus coeficientes). Sea $\mathbb{F}$ un campo infinito (por ejemplo, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), sean $P, Q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ y sea A un subconjunto infinito de $\mathbb{F}$. Si $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para todo $\alpha \in A$, entonces $P = Q$.

11. Ejemplo: dos polinomios diferentes sobre un campo finito pueden tener los mismos valores en todos los puntos. En campos finitos es posible la situación cuando $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}$, pero $P \ne Q$. Recordemos que en el campo de dos elementos $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ se cumple la igualdad $1 + 1 = 0$. Consideremos los siguientes dos polinomios sobre el campo $\mathbb{F}_2$:

$$P(x) = x + x^5, \qquad Q(x) = 0.$$

Notemos que P y Q son dos polinomios diferentes, pues tienen coeficientes diferentes. Pero $P(0) = 0 = Q(0)$ y $P(1) = 1 + 1 + 0 = Q(0)$, así que $P(\alpha) = Q(\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathbb{F}_2$.