Descomposición de permutaciones en ciclos disjuntos

Objetivos. Demostrar que toda permutación su puede descomponer en transposiciones simples. Definir el número de inversiones de una permutación y estudiar la relación de este número con la descomposición en transposiciones simples.

Requisitos. Producto (composición) de permutaciones, ciclos disjuntos.

1. Definiciones. Cualquier permutación se puede escribir como un producto de ciclos disjuntos:

$$\varphi = \mathrm{c}_n(a_{1,1}, \ldots, a_{1,r_1})\, \mathrm{c}_n(a_{2,1}, \ldots, a_{2,r_2}) \cdots \mathrm{c}_n(a_{m,1}, \ldots, a_{m,r_m}).$$

La frase *ciclos disjuntos* significa que los conjuntos $\{a_{1,1}, \ldots, a_{1,r_1}\}$, $\{a_{2,1}, \ldots, a_{2,r_2}\}$, $\ldots$, $\{a_{m,1}, \ldots, a_{m,r_m}\}$ son disjuntos a pares.

- Si cada elemento de 1 a n está incluido en uno de estos ciclos, es decir,

  $$\bigcup_{j=1}^{m} \{a_{j,1}, \ldots, a_{j,r_j}\} = \{1, \ldots, n\},$$

  entonces decimos que la descomposición es *completa*.

- Si ninguno de los ciclos es trivial, es decir, si $r_j > 1$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, entonces decimos que la descomposición es *reducida*.

- Decimos que la descomposición cíclica es *canónica* si en cada ciclo el primer elemento es el mínimo y los primeros elementos de los ciclos están ordenados en el orden creciente:

  $$\forall j \in \{1, \ldots, m\} \quad a_{j,1} = \min\{a_{j,1}, \ldots, a_{j,r_j}\}, \qquad a_{1,1} < a_{2,1} < \ldots, a_{m,1}.$$

2. Ejemplo de descomposición completa canónica.

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Primero construimos un ciclo que contiene al elemento 1:

$$\mathrm{c}_9(1, 8, 2).$$

Elegimos al primer elemento no incluido en este ciclo (en este ejemplo es 3) y construimos el ciclo que empieza en este elemento:

$$\mathrm{c}_9(1, 8, 2)\, \mathrm{c}_9(3, 4).$$

Elegimos al primer elemento no incluido en estos ciclos (en este ejemplo es 5) y construimos el ciclo que empieza en este elemento (en este ejemplo este ciclo es trivial):

$$\mathrm{c}_9(1,8,2)\,\mathrm{c}_9(3,4)\,\mathrm{c}_9(5).$$

Continuando este proceso obtenemos la descomposición completa canónica de φ:

$$\varphi = \mathrm{c}_9(1,8,2)\,\mathrm{c}_9(3,4)\,\mathrm{c}_9(5)\,\mathrm{c}_9(6,9)\,\mathrm{c}_9(7).$$

La descomposición reducida canónica se obtiene al quitar los ciclos triviales:

$$\varphi = \mathrm{c}_9(1,8,2)\,\mathrm{c}_9(3,4)\,\mathrm{c}_9(6,9).$$

Descomposiciones no canónicas se obtienen al cambiar el orden de ciclos o el orden de elementos en los ciclos. Por ejemplo, aquí está una descomposición reducida no canónica de φ:

$$\varphi = \mathrm{c}_9(4,3)\,\mathrm{c}_9(8,2,1)\,\mathrm{c}_9(6,9).$$

3. Ejemplo (una transposición). Consideremos la transposición $\tau_{2,4}$ del conjunto $\{1,\ldots,6\}$. Su descomposición completa canónica en ciclos disjuntos es

$$\tau_{2,4} = \mathrm{c}_6(1)\,\mathrm{c}_6(2,4)\,\mathrm{c}_6(3)\,\mathrm{c}_6(5)\,\mathrm{c}_6(6),$$

y la descomposición reducida canónica es

$$\tau_{2,4} = \mathrm{c}_6(2,4).$$

4. Ejemplo (la permutación identidad). Consideremos la permutación identidad e del conjunto $\{1,\ldots,6\}$. Su descomposición completa canónica en ciclos disjuntos es

$$e = \mathrm{c}_6(1)\,\mathrm{c}_6(2)\,\mathrm{c}_6(3)\,\mathrm{c}_6(4)\,\mathrm{c}_6(5)\,\mathrm{c}_6(6),$$

y la descomposición reducida es vacía (el número de factores es cero).

5. Tarea optativa. Escribir un programa que construya la descomposición completa canónica de una permutación. Notemos que en muchos lenguajes de programación la numeración de índices empieza en 0, por eso es natural guardar la permutación

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

como el arreglo de elementos $7, 0, 3, 2, 4, 8, 6, 1, 5$.