Correspondencia entre vectores y columnas de sus coordenadas respecto a una base fija

Objetivos. Mostrar que la correspondencia entre vectores y columnas de sus coordenadas (respecto a una base fija) preserva las operaciones lineales y las dependencias lineales.

Requisitos. Base de un espacio vectorial, coordenadas de un vector respecto a una base, vectores linealmente independientes.

1. Nota sobre la terminología (base $\coloneqq$ base ordenada). En este curso la palabra *base* se comprende como una base ordenada finita, es decir, como una lista (finita) de vectores que es linealmente independiente y genera al espacio.

Coordenadas de un vector respecto a una base (repaso)

2. Coordenadas de un vector respecto a una base (repaso). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una base de V y sea $v \in V$. Entonces existe una única tupla de escalares $x = \left[x_k\right]_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k. \tag{1}$$

Esta tupla se denota por $v_{\mathcal{B}}$ y se llama la *columna de coordenadas* (o el *vector de coordenadas*) del vector v respecto a la base $\mathcal{B}$.

3. Ejemplo. Si V es un espacio vectorial real, $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es una base de V y $v \in V$, entonces las siguientes dos igualdades son equivalentes:

$$v = 3b_1 - 5b_2 \qquad \iff \qquad v_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

4. Ejemplo. Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{C})3$ al espacio de polinomios de una variable con coeficientes complejos, de grado ≤ 3. Denotemos por $\mathcal{E} = (e_0, e_1, e_2, e_3)$ a la base canónica de este espacio:

$$e_0(t) = 1, \qquad e_1(t) = t, \qquad e_2(t) = t^2, \qquad e_3(t) = t^3.$$

Sea $f(t) = 5 + (1 - 2\,\mathrm{i})t + 4\,\mathrm{i}\,t^3$. Entonces

$$f_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 - 2\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

5. Ejemplo. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$ los vectores

$$b_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base. En efecto, estos dos vectores son linealmente independientes, y para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^2$ el siguiente sistema de ecuaciones lineales tiene una única solución:

$$\left[\begin{array}{rr|r} -7 & 2 & v_1 \\ 3 & 1 & v_2 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 0 & \frac{-v_1+2v_2}{13} \\ 0 & 1 & \frac{3v_1+7v_2}{13} \end{array}\right].$$

Por ejemplo, si $v = \begin{bmatrix} -8 \\ 9 \end{bmatrix}$, entonces el sistema

$$\left[\begin{array}{rr|r} -7 & 2 & -8 \\ 3 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

tiene solución $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, lo que significa que $v = 2b_1 + 3b_2$, esto es,

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6. Coordenadas del vector cero. El vector cero del espacio V se puede escribir como

$$\mathbf{0}_V = \sum_{j=1}^{n} 0 b_j,$$

por lo tanto

$$(\mathbf{0}_V)_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}_n.$$

7. Vector con coordenadas nulas. Si $v \in V$ tal que $v_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}_n$, entonces por la definición de las coordenadas tenemos que

$$v = \sum_{j=1}^{n} 0 b_j,$$

y la última expresión es igual a $\mathbf{0}_V$.

Correspondencia entre vectores y sus columnas de coordenadas es biyectiva

8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Consideremos la función $\Phi\colon V \to \mathbb{F}^n$ definida mediante la siguiente regla:

$$\Phi(v) \coloneqq v_{\mathcal{B}} \qquad (v \in V).$$

Entonces la función Φ es biyectiva.

Primera demostración. Empecemos con la propiedad inyectiva. Supongamos que $u, v \in V$ tales que $\Phi(u) = \Phi(v)$. Pongamos $x \coloneqq u_{\mathcal{B}}$, así que

$$u_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{B}} = x = \left[x_j\right]_{j=1}^{n}.$$

Entonces, por definición de las coordenadas de un vector en una base,

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j \qquad y \qquad v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j,$$

lo cual implica que $u = v$.

Ahora demostremos que Φ es suprayectiva. Sea $y \in \mathbb{F}^n$. Construimos $v \in V$ mediante la fórmula

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j.$$

Entonces por la definición de las coordenadas de un vector en una base tenemos que $\Phi(v) = y$. □

Segunda demostración. Consideremos la función $\Psi\colon \mathbb{F}^n \to V$ definida mediante la regla

$$\Psi(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

Vamos a demostrar que las funciones Φ y Ψ son mutualmente inversas. Primero supongamos que $v \in V$ y denotemos $\Phi(v)$ por x, asi que $x = \Phi(v) = v_{\mathcal{B}}$. Entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j,$$

lo cual significa que $v = \Psi(x)$.

Ahora al revés, supongamos que $y \in \mathbb{F}^n$ y denotemos $\Psi(y)$ por w, así que

$$w = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j.$$

Pero la última igualdad significa que $w_{\mathcal{B}} = y$, esto es, $\Phi(w) = y$. □

Coordenadas y operaciones lineales

9. Proposición (coordenadas y operaciones lineales). Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V. Entonces

$$\forall u, v \in V \qquad (u+v)_{\mathcal{B}} = u_{\mathcal{B}} + v_{\mathcal{B}}$$

y

$$\forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad (\lambda v)_{\mathcal{B}} = \lambda v_{\mathcal{B}}.$$

En otras palabras, la función Φ de la Proposición anterior es aditiva y homogénea:

$$\forall u, v \in V \qquad \Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v),$$
$$\forall v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{F} \qquad \Phi(\lambda v) = \lambda \Phi(v).$$

Demostración. Sean $u, v \in V$. Denotemos por x al vector de las coordenadas de u respecto a la base $\mathcal{B}$ y por y al vector de las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}$:

$$x \coloneqq u_{\mathcal{B}}, \qquad y \coloneqq v_{\mathcal{B}}.$$

Esto significa que

$$u = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j, \qquad v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j.$$

Sumamos estas dos igualdades, aplicamos la propiedad aditiva de sumatorias y la propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma de escalares:

$$u + v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j + \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{j=1}^{n} (x_j b_j + y_j b_j) = \sum_{j=1}^{n} (x_j + y_j) b_j.$$

Por lo tanto, los escalares $x_j + y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ son coordenadas del vector $u+v$ respecto a la base $\mathcal{B}$, esto es,

$$(u+v)_{\mathcal{B}} = \big[x_j + y_j\big]_{j=1}^{n} = x + y.$$

Si $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces por la propiedad homogénea de sumatorias y por la propiedad asociativa del producto por escalares obtenemos que

$$\lambda v = \lambda \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda (y_j b_j) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda y_j) b_j.$$

Lo último significa que los escalares λy_j $(j = 1, \ldots, n)$ son coordenadas del vector λv respecto a la base $\mathcal{B}$, esto es,

$$(\lambda v)_{\mathcal{B}} = \big[\lambda y_j\big]_{j=1}^{n} = \lambda y. \qquad \square$$

10. Corolario (columna de coordenadas de una combinación lineal). Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V, $a_1, \ldots, a_m \in V$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{F}$. Entonces

$$(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m)_{\mathcal{B}} = \lambda_1 (a_1)_{\mathcal{B}} + \ldots + \lambda_m (a_m)_{\mathcal{B}}.$$

Coordenadas y dependencias lineales

11. Proposición (coordenadas y dependencias lineales). Supongamos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ es una base de V. Consideremos una lista de vectores $u_1, \ldots, u_m$ en V. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) la lista $(u_1, \ldots, u_m)$ es linealmente dependiente;

(b) la lista de columnas $((u_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (u_m)_{\mathcal{B}})$ es linealmente dependiente.

Demostración. Esta proposición se deduce fácilmente del Corolario 10. Para entrenarnos en demostraciones, escribamos razonamientos detallados.

(a)⇒(b). Supongamos que la lista $(u_1, \ldots, u_m)$ es linealmente dependiente. Entonces existen algunos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ no todos cero y tales que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = \mathbf{0}_V.$$

Calculemos las columnas de coordenadas del lado izquierdo usando el Corolario 10 y del lado derecho usando la Observación 6:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (u_j)_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}_n.$$

Como no todos los coeficientes λ_j son cero, la última igualdad significa que las columnas $(u_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (u_m)_{\mathcal{B}}$ son linealmente dependientes.

(b)⇒(a). Supongamos que la lista de columnas $((u_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (u_m)_{\mathcal{B}})$ es linealmente dependiente. Entonces existen algunos escalares $\mu_1, \ldots, \mu_m$, no todos cero, tales que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j (u_j)_{\mathcal{B}} = \mathbf{0}_n.$$

Por el Corolario 10, el lado izquierdo se puede escribir como

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \right)_{\mathcal{B}}.$$

Ahora por la Observación 7 concluimos que

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j = \mathbf{0}_V.$$

Por la hipótesis, no todos los coeficientes λ_j son cero. Esto significa que los vectores $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente dependientes. □