Correspondencia entre transformaciones lineales y matrices

Objetivos. Estudiar la correspondencia entre transformaciones lineales y matrices.

Requisitos. Transformación lineal, matriz de una transformación lineal, cambio de base.

El siguiente teorema tiene varios nombres, por ejemplo, "el teorema sobre la extensión lineal".

1. Teorema (una transformación lineal se determina de manera única por su acción en los vectores de una base del dominio). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sean $w_1, \ldots, w_m \in W$. Entonces existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad T(a_j) = w_j.$$

Demostración. 1. Primero demostremos la **unicidad** de T. Supongamos que $T\colon V \to W$ es una transformación lineal tal que $T(a_j) = w_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sea $v \in V$. Denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$\left[\lambda_j\right]_{j=1}^{n} \coloneqq v_{\mathcal{A}}.$$

Entonces v se escribe como una combinación lineal de los vectores $a_1, \ldots, a_n$ de la siguiente manera:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j. \tag{1}$$

Aplicamos T a esta combinación lineal y utilizamos la hipótesis que T es lineal:

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j T(a_j).$$

Por la hipótesis, T cumple con la propiedad $T(a_j) = w_j$, así que

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j. \tag{2}$$

Notemos que los escalares λ_j están determinados de manera única por el vector v, así que la fórmula (2) determina el valor de $T(v)$ de manera única.

2. Demostremos la **existencia** de T. Dado un $v \in V$, lo escribimos en forma (1) y definimos $T(v)$ mediante la fórmula (2). En otras palabras, denotemos por $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ las coordenadas del vector v respecto a base $a_1, \ldots, a_n$ y pongamos

$$T(v) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j. \tag{3}$$

Ahora hay que probar que la función T definida de esta manera cumple con las propiedades requeridas.

Primero **mostremos que $\boldsymbol{T(a_k) = w_k}$** para cualquier índice $k \in \{1, \ldots, n\}$. Elegimos un k arbitrario y recordamos que

$$a_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_{j,k} a_j,$$

es decir $(a_k)_{\mathcal{A}} = \left[\delta_{j,k}\right]_{j=1}^{n}$. Aplicamos la fórmula (3) que define a la función T, con $\lambda_j = \delta_{k,j}$, luego usamos la propiedad principal de la delta de Kronecker:

$$T(a_k) = \sum_{j=1}^{n} \delta_{k,j} w_j = w_k.$$

Probemos que $\boldsymbol{T}$ es aditiva. Sean $v, u \in V$. Denotemos por λ_j y μ_j a las coordenadas de v y u respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j, \qquad u = \sum_{j=1}^{n} \mu_j a_j.$$

Entonces

$$v + u = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) a_j,$$

es decir $v + u$ tiene coordenadas $\lambda_j + \mu_j$ respecto a la base $\mathcal{A}$. Luego por definición de T,

$$T(v+u) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j + \mu_j) w_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j + \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j = T(v) + T(u).$$

Demostremos que $\boldsymbol{T}$ es homogénea. Sea $v \in V$ un vector con coordenadas λ_j y sea $\mu \in \mathbb{F}$. Entonces μv tiene coordenadas $\mu \lambda_j$ y

$$T(\mu v) = \sum_{j=1}^{n} (\mu \lambda_j) w_j = \mu \sum_{j=1}^{n} \lambda_j w_j = \mu T(v). \qquad \square$$

2. Teorema (definición de una transformación lineal por su matriz asociada). Sean V, W espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A}$ una base de V y sea $\mathcal{B}$ una base de W. Además sea $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Entonces existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$.

Demostración. Sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$. Definamos w_j como el vector del espacio W cuyas coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ son las entradas de la j-ésima columna de la matriz M:

$$w_j = \sum_{i=1}^{m} M_{i,j} b_i.$$

Por definición de la matriz asociada la igualdad $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$ se cumple si y sólo si $T(a_j) = w_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por el teorema anterior existe una y sólo una transformación lineal T que cumple con esta propiedad. $\square$

3. Teorema (espacio vectorial de las transformaciones lineales es isomorfo al espacio vectorial de matrices). Sean V, W espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$, $\dim(V) = n < +\infty$, $\dim(W) = m < +\infty$. Sea $\mathcal{A}$ una base de V y sea $\mathcal{B}$ una base de W. Entonces el mapeo $\mathcal{L}(V, W) \to \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, definido mediante la regla

$$T \mapsto T_{\mathcal{B},\mathcal{A}},$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. Esto significa que:

1. Para toda matriz $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ existe una única transformación $T \in \mathcal{L}(V, W)$ tal que $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = M$.

2. Si $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces
$$(T + U)_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} + U_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

3. Si $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$, entonces
$$(\lambda T)_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \lambda T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

4. Teorema (matriz del producto de transformaciones lineales). Sean V, W, X espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{F}$. Sea $\mathcal{A}$ una base de V, sea $\mathcal{B}$ una base de W y sea $\mathcal{C}$ una base de X. Supongamos que $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $U \in \mathcal{L}(W, X)$. Entonces

$$(UT)_{\mathcal{C},\mathcal{A}} = U_{\mathcal{C},\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}.$$

5. Corolario (una transformación lineal es invertible si y sólo si su matriz asociada es invertible). Sean V y W algunos espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sean $\mathcal{A}$ una base de V, $\mathcal{B}$ una base de W y $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$\text{la transformación } T \text{ es invertible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{la matriz } T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} \text{ es invertible.}$$