Coordenadas de funcionales lineales respecto la base dual (ejemplos)

Objetivos. Por medio de ejemplos aprender a calcular las coordenadas de funciones lineales respecto la base dual y acostumbrarse a la representación matricial de funcionales lineales.

Requisitos. Base dual, coordenadas de un funcional lineal respecto a la base dual, representación matricial de un funcional lineal.

1. Definición de la base dual (repaso). Sea V un espacio vectorial sobre un campo y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. La base dual $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ consiste en los funcionales definidos mediante la siguiente regla:

$$\chi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\right) = \lambda_i.$$

De aquí sigue que

$$\chi_i(a_j) = \delta_{i,j}.$$

2. Expansión de un funcional lineal respecto la base dual (repaso). Si $\varphi \in V^*$, entonces

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(a_j)\chi_j.$$

3. Representación matricial de un funcional lineal (repaso). Para todo $v \in V$ y todo $\varphi \in V^*$,

$$\varphi(v) = \varphi_\Gamma^\top v_{\mathcal{A}}.$$

4. Ejemplo: coordenadas de un funcional lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = 7x_1 - 9x_2 + x_3.$$

I. Demostrar que φ es un funcional lineal.

II. Calcular las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E}$ del espacio $\mathbb{R}^3$.

III. Para comprobación calcular $\varphi(y)$, donde

$$y = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix},$$

de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E}$.

Solución. I. Mostremos que φ es lineal. Para todos $x, y \in \mathbb{R}^3$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + y) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} 7(\lambda x + y)_1 - 9(\lambda x + y)_2 + (\lambda x + y)_3 \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} 7(\lambda x_1 + y_1) - 9(\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \lambda(7x_1 - 9x_2 + x_3) + (7y_1 - 9y_2 + y_3) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \lambda\varphi(x) + \varphi(y).
\end{aligned}$$

En los pasos (i) y (iv) usamos la definición de φ; en el paso (ii) aplicamos la definición de operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$ (que la adición y la multiplicación por escalares se hacen entrada por entrada), en el paso (iii) usamos la propiedad distributiva en $\mathbb{R}$ y las propiedades asociativa y conmutativa en $\mathbb{R}$ para reagruparar los sumandos.

Otra manera de escribir la demostración:

$$\varphi(\lambda x + y) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \varphi\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \\ \lambda x_3 + y_3 \end{bmatrix}\right) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} 7(\lambda x_1 + y_1) - 9(\lambda x_2 + y_2) + (\lambda x_3 + y_3)$$

$$\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \lambda(7x_1 - 9x_2 + x_3) + (7y_1 - 9y_2 + y_3) \overset{\text{(iv)}}{=\!=} \lambda\varphi(x) + \varphi(y).$$

En el paso (i) se aplicó la definición de operaciones lineales en $\mathbb{R}^3$, en (ii) y (iv) la definición de φ, y en (iii) las propiedades de operaciones con números reales.

II. Las coordenadas de φ en la base dual son los valores de φ en los vectores básicos e_1, e_2, e_3:

$$\varphi(e_1) = \varphi\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 7, \qquad \varphi(e_2) = -9, \qquad \varphi(e_3) = 1.$$

Por lo tanto,

$$\varphi = 7\gamma_1 - 9\gamma_2 + \gamma_3.$$

Respuesta: el vector de coordenadas de φ respecto la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ es

$$\varphi_\Gamma = \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

III. Comprobación. Primero calculamos $\varphi(y)$ por la regla de correspondencia de φ:

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}\right) = -28 - 63 + 5 = -86.$$

Ahora calculamos $\varphi(y)$ por la fórmula de representación matricial de un funcional lineal:

$$\varphi(y) = \varphi_\Gamma^\top y_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 7, & -9, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} = -28 - 63 + 5 = -86. \quad \checkmark$$

En este ejemplo se hacen las mismas operaciones aritméticas por ambos métodos. $\square$

5. Ejemplo: coordenadas de un funcional lineal $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Sea $\varphi\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(P) = -2P(5) + P'(4).$$

I. Demostrar que φ es un funcional lineal.

II. Calcular las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$ del espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcular $\varphi(Q)$, donde $Q(t) = 6 - t - 7t^2$, de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E}$.

Solución. I. Sean $P, Q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de la derivada,

$$(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'.$$

Por las propiedades de las operaciones lineales con polinomios, para todo $t \in \mathbb{R}$

$$(\lambda P + Q)(t) = \lambda P(t) + Q(t).$$

Aplicando estas propiedades, la definición del funcional φ y propiedades de operaciones con números reales, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + Q) &= -2(\lambda P + Q)(5) + (\lambda P + Q)'(4) = -2(\lambda P + Q)(5) + (\lambda P' + Q')(4) \\
&= -2\big(\lambda P(5) + Q(5)\big) + \big(\lambda P'(4) + Q'(4)\big) \\
&= \lambda\big(-2P(5) + P'(4)\big) + \big(-2Q(5) + Q'(4)\big) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q).
\end{aligned}$$

II. Aplicamos φ a los elementos de la base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(1) = -2, \qquad \varphi(t) = -10 + 1 = -9, \qquad \varphi(t^2) = -50 + 8 = -42.$$

Por la fórmula de expansión de un funcional respecto la base dual,

$$\varphi = -2\gamma_0 - 9\gamma_1 - 42\gamma_2, \qquad \text{esto es,} \qquad \varphi_\Gamma = \begin{bmatrix} -2 \\ -9 \\ -42 \end{bmatrix}.$$

III. Calculamos $\varphi(Q)$ con $Q(t) = 6 - t - 7t^2$ por la regla de correspondencia de φ:

$$(6-t-7t^2)' = -1-14t, \qquad \varphi(6-t-7t^2) = -2(6-5-7\cdot 25)+(-1-14\cdot 4) = 348-57 = 291.$$

Ahora calculamos $\varphi(Q)$ por la fórmula de representación matricial de un funciona lineal:

$$\varphi(Q) = \varphi_\Gamma^\top Q_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -2, -9, -42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ -7 \end{bmatrix} = -12 + 9 + 294 = 291. \quad \checkmark \qquad \square$$

6. Ejemplo: coordenadas de un funcional lineal $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Sea $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

I. Demostrar que φ es un funcional lineal.

II. Calcular las coordenadas de φ respecto a la base $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$, donde Γ es la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

III. Para comprobación calcular $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes: primero, por la regla de correspondencia de φ; luego, por la fórmula $\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E}$.

$$Y = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. I. Para demostrar que φ es lineal, usamos la definición de φ y propiedades de operaciones con matrices:

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda X + Y) &= \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} (\lambda X + Y) \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \Big(\lambda \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} Y\Big) \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} Y \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda\varphi(X) + \varphi(Y).
\end{aligned}$$

II. Aplicamos el funcional φ a las matrices $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$:

$$\varphi(E_{1,1}) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = -24;$$

$$\varphi(E_{1,2}) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = 8;$$

$$\varphi(E_{2,1}) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = -30;$$

$$\varphi(E_{2,2}) = \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = 10.$$

De aquí

$$\varphi = -24\gamma_1 + 8\gamma_2 - 30\gamma_3 + 10\gamma_4, \qquad \text{esto es,} \qquad \varphi_\Gamma = \begin{bmatrix} -24 \\ 8 \\ -30 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

III. Para la matriz dada

$$Y = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

calculemos $\varphi(Y)$ de dos maneras diferentes. Por la regla de correspondencia de φ:

$$\begin{aligned} \varphi(Y) &= \begin{bmatrix} -4, & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32+5, & 12-25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -27, & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = -162 + 26 = -136. \end{aligned}$$

Usando la representación matricial de φ:

$$\begin{aligned} \varphi(Y) = \varphi_\gamma^\top Y_{\mathcal{E}} &= \begin{bmatrix} -24, & 8, & -30, & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ -3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= -192 - 24 + 30 + 50 = -136. \quad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$

7. Ejemplo: coordenadas de otro funcional lineal $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
Hacer la tarea del ejemplo anterior sin demostración de la linealidad para el siguiente funcional lineal $\varphi\colon \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(X) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} X \right).$$

Hacer la comprobación con la siguiente matriz Y:

$$Y = \begin{bmatrix} -9 & -4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Solución. I. Aplicamos φ a los elementos de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\varphi(E_{1,1}) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \right) = -7;$$

$$\varphi(E_{1,2}) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \right) = 8;$$

$$\varphi(E_{2,1}) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 11 & 0 \end{bmatrix} \right) = 3;$$

$$\varphi(E_{2,2}) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 11 \end{bmatrix} \right) = 11.$$

De aquí

$$\varphi = -7\gamma_1 + 8\gamma_2 + 3\gamma_3 + 11\gamma_4, \qquad \varphi_\gamma = \begin{bmatrix} -7 \\ 8 \\ 3 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

II. Comprobación.

$$\begin{aligned} \varphi(Y) &= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 8 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -4 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 63 - 6 & 28 + 21 \\ -72 - 22 & -32 + 77 \end{bmatrix} \right) = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 57 & 49 \\ -94 & 45 \end{bmatrix} \right) = 102. \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\varphi(Y) = \varphi_\Gamma^\top Y_\mathcal{E} = \begin{bmatrix} -7, & 8, & 3, & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} = 63 - 32 - 6 + 77 = 102. \quad \checkmark \qquad \square$$