# Coordenadas de un vector respecto a una base

**Objetivos.** Demostrar que todo vector se puede descomponer de manera única en una combinación lineal de elementos de una base fija. Demostrar que esta propiedad es una propiedad característica de bases.

**Requisitos.** Base, conjunto generador, vectores linealmente independientes.

**1. Nota sobre la terminología (base $\coloneqq$ base ordenada).** En algunos cursos y libros de Álgebra Lineal se consideran dos tipos de bases en espacios vectoriales: *bases no ordenadas* (conjuntos) y *bases ordenadas* (listas). En este curso trabajamos solamente con bases ordenadas y las llamamos simplemente *bases*.

**2. Proposición (coordenadas de un vector respecto a una base).** Sea $V$ un EV/$\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una base de $V$ y sea $v \in V$. Entonces existe una única tupla de escalares $x = \left[x_k\right]_{k=1}^n \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$v = \sum_{k=1}^n x_k b_k. \tag{1}$$

*Demostración.* Según la definición de base, $\mathcal{B}$ es linealmente independiente y $\ell(\mathcal{B}) = V$. La igualdad $\ell(\mathcal{B}) = V$ significa precisamente la **existencia** de coeficientes $x_1, \ldots, x_n$ tales que se cumple (1).

Demostremos la **unicidad**. Supongamos que $x, y \in \mathbb{F}^n$ son algunas tuplas de coeficientes tales que

$$v = \sum_{k=1}^n x_k b_k \qquad \text{y} \qquad v = \sum_{k=1}^n y_k b_k.$$

Restando estas dos igualdades y aplicando la ley distributiva obtenemos que

$$\sum_{k=1}^n (x_k - y_k) b_k = \mathbf{0}.$$

Como los vectores $b_1, \ldots, b_n$ son linealmente independientes, todos los escalares $x_k - y_k$ son cero, esto es, $x_k = y_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

**3. Definición (vector de coordenadas de un vector respecto a una base).** Sea $V$ un EV/$\mathbb{F}$, sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una base de $V$ y sea $v \in V$. Entonces el vector $x \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$v = \sum_{k=1}^n x_k b_k$$

se llama *vector de coordenadas* de $v$ respecto a la base $\mathcal{B}$ y se denota por $v_{\mathcal{B}}$.

Resulta que la propiedad escrita en la proposición anterior es una *propiedad característica* de bases.

**4. Proposición (criterio de base en términos de la descomposición única de vectores).** Sea $V$ un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una lista de vectores en $V$. Supongamos que para todo $v \in V$ existe una única tupla de escalares $x \in \mathbb{F}^n$ tal que

$$v = \sum_{k=1}^{n} x_k b_k.$$

Entonces $\mathcal{B}$ es una base de $V$.

*Demostración.* Primero notemos que para todo $v \in V$ *existe* una tupla de escalares $x \in \mathbb{F}^n$ tal que $v = \sum_{k=1}^n x_k b_k$. Esto significa que $\ell(\mathcal{B}) = V$. Falta demostrar que $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Supongamos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ y

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = \mathbf{0}.$$

Por otro lado, poniendo $\mu_k = 0$ para todo $k$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k b_k = \mathbf{0}.$$

Hemos escrito el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal de los vectores $b_1, \ldots, b_n$ de dos maneras: 1) con coeficientes $\lambda_k$ y 2) con coeficientes $\mu_k$. Pero la representación debe ser única, así que $\lambda_k = \mu_k = 0$ para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

**5. Ejemplo.** Sean $b_1, b_2$ los siguientes dos vectores de $\mathbb{R}^2$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Usando la proposición anterior demostrar que la lista $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

*Solución.* Sea $x \in \mathbb{R}^2$. Demostremos que existe un único par de escalares $y \in \mathbb{R}^2$ tal que $x = y_1 b_1 + y_2 b_2$. La última igualdad es equivalente al siguiente sistema para las incógnitas $y_1, y_2$:

$$\left[\begin{array}{rr|c} 3 & -1 & x_1 \\ 5 & 4 & x_2 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{4x_1+x_2}{17} \\ 0 & 1 & \frac{-5x_1+3x_2}{17} \end{array}\right].$$

El sistema tiene una única solución la cual se llama *el vector de coordenadas de $x$ respecto a la base $\mathcal{B}$*:

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{-5x_1+3x_2}{17} \\ \frac{4x_1+x_2}{17} \end{bmatrix}.$$

Como el vector $x$ era arbitrario, $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. $\square$