Construcción de números complejos

(ejercicios)

Objetivos. Definir números complejos como pares ordenados de números reales, definir las operaciones de adición y multiplicación de números complejos y demostrar sus propiedades principales.

Requisitos. Propiedades de la adición y multiplicación de números reales.

El conjunto de números complejos

1. $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$. Denotemos por $\mathbb{C}$ al conjunto $\mathbb{R}^2$ de todos los pares ordenados de números reales. Por ejemplo, algunos elementos de $\mathbb{C}$ son

$$(7, -1/2), \qquad (\sqrt{3}, \pi), \qquad (0, -4.7).$$

Las palabras *pares ordenados* significan que (a, b), en general, no es lo mismo que (b, a). Por ejemplo, $(7, -\sqrt{5})$ y $(-\sqrt{5}, 7)$ son dos elementos *diferentes* de $\mathbb{C}$:

$$(7, -\sqrt{5}) \neq (-\sqrt{5}, 7).$$

2. Igualdad de números complejos. Dos pares ordenados (a, b) y (u, v) se llaman *iguales* si $a = u$ y $b = v$. En este caso se escribe $(a, b) = (u, v)$.

3. Ejemplos. Determine si los siguientes pares ordenados de números reales son iguales entre si o no:

$$(6, -4) \underbrace{\qquad}_{=/\neq} (-4, 6), \qquad\qquad (2\sqrt{3}, 9/2) \underbrace{\qquad}_{=/\neq} (\sqrt{12}, 4.5),$$

$$(3^2, \sqrt{81}) \underbrace{\qquad}_{=/\neq} (9, 9), \qquad\qquad (0, -2) \underbrace{\qquad}_{=/\neq} (4, 5).$$

4. Ejercicio. ¿Cuándo $(a, b) = (b, a)$?

5. Ejercicio. Encuentre $x, y \in \mathbb{R}$ tales que

$$(2x, 7) = (4, y + 2).$$

Solución. Por la definición, la igualdad de pares ordenados $(2x, 7) = (4, y + 2)$ es equivalente al siguiente sistema de dos igualdades de números reales:

$$2x = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad 7 = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Resolviendo estas ecuaciones encontramos $x = \underbrace{\qquad}_{?}$, $y = \underbrace{\qquad}_{?}$. □

Suma y producto de números complejos (definición)

6. Definición. Sean c y z dos números complejos:

$$c = (a, b) \in \mathbb{C}, \qquad z = (x, y) \in \mathbb{C}.$$

Definimos su *suma* $c + z$ y su *producto* cz de la siguiente manera:

$$c + z := (a + x, b + y), \qquad cz := (ax - by, ay + bx).$$

7. Ejemplo. Sean $c = (5, -7)$, $z = (3, 2)$. Entonces

$$c + z = (5 + 3, -7 + 2) = (\underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}),$$

$$cz = (5 \cdot 3 - (-7) \cdot 2,\ 5 \cdot 2 + (-7) \cdot 3) = (15 + \underbrace{\qquad}_{?}, 10 - \underbrace{\qquad}_{?}) = (\underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}).$$

8. Ejemplo. Calculamos la suma y el producto de los números complejos $(3, 6)$, $(-4, 1)$.

$$(3, 6) + (-4, 1) = (3 - 4, 6 + 1) = (\qquad, \qquad),$$
$$(3, 6)(-4, 1) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (-18, -21).$$

9. Palabras "suma" y "adición", "producto" y "multiplicación". *Conocimientos y destrezas* son resultados de *estudio y entrenamiento*. La *suma* y el *producto* de dos números complejos son resultados de las operaciones *adición* y *multiplicación*. La suma de dos números complejos es un número complejo. La adición de números complejos es un *operación binaria* que a cada par de números complejos les asocia su suma.

Propiedades de la adición de números complejos

10. Propiedad conmutativa de la adición en $\mathbb{C}$. Para cualesquier $c, z \in \mathbb{C}$, $c+z = z+c$.

Demostración. Sean $c = (a, b)$, $z = (x, y)$, donde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$c + z \overset{(1)}{=\!=} (a + x, b + y) \overset{(2)}{=\!=} (x + a, y + b) \overset{(3)}{=\!=} z + c.$$

Justificación de los pasos:

(1) Definición de la suma de números complejos.

(2) Propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la adición de números reales.

(3) $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ □

11. Propiedad asociativa de la adición en $\mathbb{C}$. Para cualesquier $c, w, z \in \mathbb{C}$, $(c+w)+z = c + (w + z)$.

Demostración. Sean $c = (a, b)$, $w = (u, v)$, $z = (x, y)$, donde $a, b, u, v, x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(c + w) + z \overset{(1)}{=\!=} (a + u, b + v) + z \overset{(2)}{=\!=} ((a + u) + x, (b + v) + y)$$

$$\overset{(3)}{=\!=} \big(a + (\underbrace{\qquad}_{?}), b + (\underbrace{\qquad}_{?})\big) \overset{(4)}{=\!=} c + \big(\underbrace{\qquad}_{?} \ \underbrace{\qquad}_{?}\big)$$

$$\overset{(5)}{=\!=} c + (w + \underbrace{\qquad}_{?}).$$

Justificación de los pasos:

(1), (2) Definición de la suma de números complejos.

(3)

(4), (5) $\square$

12. Notación $0_{\mathbb{C}}$. Denotamos por $0_{\mathbb{C}}$ al par ordenado $(0, 0)$.

13. El neutro aditivo en $\mathbb{C}$. El par ordenado $0_{\mathbb{C}}$ es un neutro aditivo en $\mathbb{C}$:

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad z + 0_{\mathbb{C}} = z.$$

Demostración. Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$z + 0_{\mathbb{C}} \overset{(1)}{=\!=} (x, y) + (0, 0) \overset{(2)}{=\!=} (x + 0, y + 0) \overset{(3)}{=\!=} \underbrace{\qquad}_{?}.$$

(1) Definición de $0_{\mathbb{C}}$ y la notación para los componentes de z.

(2)

(3) El número 0 es un neutro aditivo en $\mathbb{R}$. $\square$

14. Notación $-z$ en $\mathbb{C}$. Para cualquier $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, denotemos por $-z$ al par $(-x, -y)$.

15. Ejemplos. $-(7, -4) = (-7, 4)$, $\qquad -(-5, 1) = \underbrace{\qquad}_{?}$.

16. Un ejemplo más. Si $z = (\sqrt{2}, -1.5)$, entonces $-z = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

17. Inversos aditivos en $\mathbb{C}$. Para cualquier $z \in \mathbb{C}$,

$$z + (-z) = 0_{\mathbb{C}}.$$

Demostración. Sea $z = (x, y)$. Entonces

$$z + (-z) \overset{(1)}{=\!=} (x, y) + (-x, -y) \overset{(2)}{=\!=} \big(x + (-x), \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\big) \overset{(3)}{=\!=} (\underbrace{\qquad}_{?}, 0) \overset{(4)}{=\!=} 0_{\mathbb{C}}.$$

(1) Notación $-z$, notación para las componentes de z.

(2) Definición de la operación $+$ en $\mathbb{C}$.

(3) Propiedad principal de inversos aditivos en $\mathbb{R}$.

(4) Notación $\underbrace{\qquad}_{?}$. □

Definición del producto de dos números complejos (repaso)

18. Definición de la multiplicación en $\mathbb{C}$ (repaso).
Sean $w = (♁, ☾)$, $z = (♂, ♀)$. Entonces

$$wz = (♁♂ - ☾♀,\ ♁♀ + ☾♂).$$

19. Definición de la multiplicación en $\mathbb{C}$ (repaso). Sean $w = (u, v)$, $z = (x, y)$. Entonces el producto de los pares ordenados w y z se define como el par ordenado

$$\big(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}\ \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\big).$$

20. Ejemplo.

$$(7, -5)(2, 6) = (\underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}, \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?}) = (14 + \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad\qquad}_{?}) = (44, 32).$$

Algunas propiedades de la multiplicación de números complejos

21. Propiedad conmutativa de la multiplicación en $\mathbb{C}$. Para cualesquier $w, z \in \mathbb{C}$, $wz = zw$.

Demostración. Sean $w = (u, v)$, $z = (x, y)$, donde $u, v, x, y \in \underbrace{\qquad}_{?}$. Entonces

$$wz \overset{(1)}{=\!=} (\underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad\qquad}_{?}) \overset{(2)}{=\!=} (xu - yv, yu + xv) \overset{(3)}{=\!=} zw.$$

Justificación de los pasos:

(1) Definición $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de números complejos.

(2) Propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la multiplicación de números reales.

(3) □

22. Propiedad asociativa de la multiplicación en $\mathbb{C}$. Para cualesquier $c, w, z \in \mathbb{C}$, $c(wz) = (cw)z$.

Demostración. Sean $c = (a, b)$, $w = (u, v)$, $z = (x, y)$. Entonces

$$c(wz) =$$

$$= (cw)z.$$

Justificación:

□

23. Propiedad neutra multiplicativa del par ordenado $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$. Para cualquier $z = (x, y) \in \mathbb{C}$,

$$(x, y)(1, 0) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Demostración.

$$(x, y)(1, 0) \stackrel{(1)}{=\!=} \big(x \cdot 1 - \underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad}_{?}\big) \stackrel{(2)}{=\!=} (\qquad, \qquad).$$

Justificación:

(1) Definición

(2) Propiedades de los números reales 0 y $\underbrace{\qquad}_{?}$. □

24. Propiedad distributiva de la multiplicación de números complejos respecto a la adición de números complejos. Sean $c, w, z \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(c + w)z = cz + wz.$$

Demostración. Denotemos las componentes de c, w, z de la siguiente manera:

$$c = (a, b), \qquad w = (u, v), \qquad z = (x, y).$$

Entonces

$$(c + w)z \stackrel{(1)}{=\!=} (a + u, b + v)\,(x, y) \stackrel{(2)}{=\!=} \big((a + u)x - \underbrace{\qquad\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad\qquad}_{?} - \underbrace{\qquad\qquad}_{?}\big)$$

$$\stackrel{(3)}{=\!=} \big(ax + ux - (\underbrace{\qquad\qquad}_{?}), \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \big)$$

$$\stackrel{(4)}{=\!=} \big((ax - by) + (\qquad\qquad), (\qquad\qquad) + (\qquad\qquad)\big)$$

$$\stackrel{(5)}{=\!=} (\qquad\qquad, \qquad\qquad) + (\qquad\qquad, \qquad\qquad) \stackrel{(6)}{=\!=} cz + wz.$$

Justificación de los pasos:

(1), (5)

(2), (6)

(3) Propiedad distributiva en $\mathbb{R}$.

(4) Propiedades de la adición en $\mathbb{R}$. □