Congruencia de matrices reales simétricas

Objetivos. Conocer el concepto de matrices congruentes (en el caso de matrices reales simétricas).

Requisitos. Matriz asociada a una forma cuadrática, cambio de la matriz asociada a una forma cuadrática al cambiar la base del espacio, unicidad de la representación matricial de una forma cuadrática, reducción de una forma cuadrática a su forma canónica, definición geométrica de los índices de inercia, teorema de los índices de inercia.

1. Repaso. Repase todos los conceptos mencionados en los Requisitos.

Correspondencia entre las matrices reales simétricas y las formas cuadráticas

2. Matrices reales simétricas (notación). Denotemos por $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de las matrices reales simétricas de orden n:

$$\mathcal{SM}_n(\mathbb{R}) \coloneqq \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\colon \quad A^\top = A\big\}.$$

Se sabe que $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ es un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Forma cuadrática asociada a una matriz real simétrica. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Definimos las funciones $f_A\colon (\mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ y $q_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$f_A(x, y) \coloneqq x^\top A y, \qquad q_A(x) \coloneqq x^\top A x.$$

Entonces f_A es una forma bilineal simétrica sobre $\mathbb{R}^n$ y q_A es la forma cuadrática generada por f_A.

4. Matriz asociada a la forma cuadrática asociada a una matriz real simétrica. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ y sea $\mathcal{E}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Entonces por el teorema de la unicidad de la representación matricial de una forma bilineal obtenemos que

$$(q_A)_\mathcal{E} = (f_A)_\mathcal{E} = A.$$

5. Propiedades de la correspondencia entre las matrices reales simétricas y las formas cuadráticas. El mapeo $\Xi\colon\ \mathcal{SM}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ definido como $\Xi(A) \coloneqq q_A$ es un isomorfismo lineal.

6. Índices de inercia de una matriz real simétrica. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Entonces los índices de inercia de A se definen como los índices de inercia de la forma cuadrática asociada a la matriz A:

$$\mathrm{r}_+(A) \coloneqq \mathrm{r}_+(q_A), \qquad \mathrm{r}_-(A) \coloneqq \mathrm{r}_-(q_A).$$

Congruencia de matrices reales simétricas

7. Definición (congruencia de matrices simétricas). Sean $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Si dice que A y B son *congruentes* (notación: $A \cong B$) si existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^\top AP$.

8. Ejercicio (la congruencia de matrices simétricas es una relación de equivalencia). Demuestre que la relación $\cong$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

La siguiente proposición explica para qué puede servir el concepto de la congruencia de matrices reales simétricas.

9. Matrices asociadas a una forma cuadrática con respecto a dos bases son congruentes. Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, sea $q \in \mathcal{Q}(V)$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Entonces

$$q_{\mathcal{A}} \cong q_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sigue directamente de la fórmula de cambio de la matriz asociada a una forma cuadrática al cambiar la base de espacio. □

10. Forma matricial del teorema de la diagonalización de las formas cuadráticas: toda matriz real simétrica es congruente a una matriz diagonal con entradas 1, −1 y 0 en la diagonal principal. Sea $A \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Entonces existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una matriz diagonal D de la forma

$$D = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m}, 0, \ldots, 0)$$

tal que $A = P^\top DP$.

Demostración. Sigue del teorema de la diagonalización de las formas cuadráticas. □

11. Observación. Por el teorema de los índices de inercia, los números p y m de la Proposición anterior coinciden con los índices de inercia de la matriz A:

$$p = \mathrm{r}_+(A), \qquad m = \mathrm{r}_-(A).$$

12. Toda matriz invertible es una matriz de transición (repaso). Sea V un espacio vectorial real de dimensión n, sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible y sea $\mathcal{A}$ una base de V. Entonces existe una única base $\mathcal{B}$ del espacio V tal que $P = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

Idea de demostración. Denotamos los elementos de la base $\mathcal{A}$ por $a_1, \ldots, a_n$ y definimos el sistema de vectores $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de la siguiente manera:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} P_{i,j} a_i.$$

Como la matriz P es invertible, se puede demostrar que $\mathcal{B}$ es una base de V. De la definición de la matriz de transición sigue que $\mathcal{B}$ es la única base del espacio V tal que $P = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. □

13. Lema: Si dos matrices reales simétricas son congruentes, entonces son matrices asociadas a una forma cuadrática con respecto a dos bases. Sean $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ tales que $A \cong B$. Entonces existe una forma cuadrática $q \in \mathcal{Q}(\mathbb{R}^n)$ y dos bases $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ del espacio $\mathbb{R}^n$ tales que

$$A = q_{\mathcal{A}}, \qquad B = q_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible tal que

$$B = P^\top AP.$$

Pongamos $\mathcal{A} = \mathcal{E}$, definimos $\mathcal{B}$ como la base $\mathbb{R}^n$ tal que $P = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ y consideramos la forma cuadrática $q = q_A$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad q(x) \coloneqq x^\top Ax.$$

Entonces $q_{\mathcal{A}} = A$ y $q_{\mathcal{B}} = B$. $\square$

14. Lema: Si dos matrices diagonales simétricas normalizadas son congruentes, entonces son iguales. Sean $D_1, D_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices diagonales de la siguiente forma:

$$D_1 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_1}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m_1}, 0, \ldots, 0), \quad D_2 = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_2}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{m_2}, 0, \ldots, 0).$$

Sea $D_1 \cong D_2$. Entonces $D_1 = D_2$.

Demostración. Por el lema anterior D_1 y D_2 son matrices asociadas a una forma cuadrática con respecto a dos bases. El teorema de los índices de inercia dice que $p_1 = p_2$ y $m_1 = m_2$. Por la forma de las matrices D_1 y D_2 esto significa que $D_1 = D_2$. $\square$

15. Proposición (criterio de la congruencia de matrices reales simétricas). Sean $A, B \in \mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \cong B$.

(b) $\mathrm{r}_+(A) = \mathrm{r}_+(B) \quad \text{y} \quad \mathrm{r}_-(A) = \mathrm{r}_-(B)$.

Demostración. Por la Proposición 10 (que es otra forma del teorema de la diagonalización de las formas cuadráticas) existen matrices diagonales D_1 y D_2 como en el lema anterior tales que $A \cong D_1$, $B \cong D_2$,

$$\mathrm{r}_+(A) = p_1, \qquad \mathrm{r}_-(A) = m_1, \qquad \mathrm{r}_+(B) = p_2, \qquad \mathrm{r}_-(B) = m_2.$$

De la forma de las matrices D_1 y D_2 sigue que

$$D_1 \cong D_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p_1 = p_2 \quad \wedge \quad m_1 = m_2.$$

Por la transitividad de la relación $\cong$,

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad D_1 \cong D_2.$$

Ahora vemos que las condiciones (a) y (b) son equivalentes:

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad D_1 \cong D_2 \qquad \Longleftrightarrow (p_1 = p_2) \quad \wedge \quad (m_1 = m_2).$$ $\square$

16. Ejercicio. Cuente el número de las clases de congruencia en $\mathcal{SM}_n(\mathbb{R})$ en el caso $n = 2$, luego en el caso $n = 3$.

Equivalencia de formas cuadráticas

17. Definición (equivalencia de formas cuadráticas). Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales reales de la misma dimensión n, sean $q_1 \in \mathcal{Q}(V_1)$ y $q_2 \in \mathcal{Q}(V_2)$. Se dice que q_1 y q_2 son equivalentes y se escribe $q_1 \sim q_2$ si existe una base $\mathcal{A}$ de V_1 y una base $\mathcal{B}$ de V_2 tales que

$$(q_1)_{\mathcal{A}} = (q_2)_{\mathcal{B}}.$$

18. Ejercicio: probar que es una relación de equivalencia. Demostrar que esta relación binaria $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

19. Criterio de la equivalencia de las formas cuadráticas. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales reales de la misma dimensión n, sean $q_1 \in \mathcal{Q}(V_1)$ y $q_2 \in \mathcal{Q}(V_2)$. Entonces:

$$q_1 \sim q_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{r}_+(q_1) = \mathrm{r}_+(q_2) \quad \wedge \quad \mathrm{r}_-(q_1) = \mathrm{r}_-(q_2).$$