Espacios vectoriales complejos con producto interno

Objetivos. Estudiar la definición de producto interno en espacios vectoriales complejos, conocer varios ejemplos.

Requisitos. Definición y ejemplos de espacios vectoriales reales con producto interno.

1. Producto interno en un espacio vectorial real (repaso). Sea V un espacio vectorial real. Recordamos que una función $p\colon V^2 \to \mathbb{R}$ se llama producto interno en V si es bilineal, simétrica y positiva definida. Diciendo que p es positiva definida afirmamos que $p(v,v) > 0$ para cualquier $v \in V \setminus \{0\}$. Se recomienda recordar y escribir de manera explícita qué significa la propiedad bilineal y qué significa la propiedad simétrica. Por supuesto, si sólo pedimos que p sea lineal respecto a un argumento y simétrica, entonces linealidad respecto al otro argumento se deduce fácilmente.

2. Necesidad de modificar la definición en el caso complejo. Si V es un espacio vectorial complejo no trivial ($V \neq \{\mathbf{0}\}$), entonces no existe ninguna función $p\colon V \times V \to \mathbb{C}$ que sea bilineal (con escalares complejos), simétrica y positiva definida. En realidad, si $v \in V \setminus \{0\}$, entonces

$$\langle \mathrm{i}\, v, \mathrm{i}\, v\rangle = \mathrm{i}^2 \langle v, v\rangle = -\langle v, v\rangle < 0.$$

Por lo tanto, en espacios vectoriales complejos la definición de producto interno se debe modificar.

3. Definición (producto interno en un espacio vectorial complejo). Sea V un espacio vectorial complejo. Una función $p\colon V \times V \to \mathbb{C}$ se denomina *producto interno* en V, si cumple con las siguientes propiedades:

i) p es lineal con respecto al segundo argumento:

$$\begin{aligned} p(u, v + w) &= p(u, v) + p(u, w) \qquad && \forall u, v, w \in V, \\ p(u, \lambda v) &= \lambda p(u, v) && \forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}; \end{aligned}$$

ii) p es *hermítica*:

$$p(u, v) = \overline{p(v, u)} \qquad \forall u, v \in V;$$

iii) p es definida positiva:

$$p(v, v) > 0 \qquad \forall v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

4. Propiedades simples del producto interno.

1. p es *lineal conjugado* con respecto al primer argumento:

$$\begin{aligned} p(u+v,w) &= p(u,w)+p(v,w) && \forall u,v,w \in V; \\ p(\lambda u,v) &= \overline{\lambda} p(u,v) && \forall u,v \in V \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2. $p(\mathbf{0},v) = p(v,\mathbf{0}) = 0$ para cualquier $v \in V$.

5. Nota. Algunos autores piden que en el caso complejo un producto interno sea lineal con respecto al primer argumento y lineal conjugado con respecto al segundo argumento.

6. Nota. En cualquier espacio complejo, excepto el espacio nulo $\{\mathbf{0}\}$, existen muchos productos internos. Si un espacio vectorial se considera con un producto interno fijo, entonces este producto interno se denota habitualmente por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es decir, en lugar de $p(u,v)$ se escribe $\langle u, v \rangle$.

7. Ejercicio. Sean $u_1,\ldots,u_p,v_1,\ldots,v_q \in V$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q \in \mathbb{R}$. Demuestre la fórmula:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j, \sum_{k=1}^{q} \beta_k v_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \overline{\alpha_j} \beta_k \langle u_j, v_k \rangle.$$

8. Definición (espacio euclideano complejo, espacio unitario). Para espacios vectoriales complejos de dimensión finita se usan los siguientes términos: *espacio unitario*, *espacio euclideano complejo*, *espacio de Hilbert de dimensión finita*.

9. Observación. Las condiciones que cumple un producto interno en el caso complejo parecen mucho a las condiciones en el caso real. La propiedad hermítica se convierte en la propiedad simétrica si nos restringimos a los números reales. Por eso vamos a considerar el caso complejo notando las diferencias del caso real cuando sea necesario.

Ejemplos de espacios unitarios

10. Ejemplo. $\mathbb{C}^n$ con el *producto interno canónico* (*producto-punto*)

$$\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k \qquad \forall x, y \in \mathbb{C}^n.$$

11. Ejemplo. $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ con el siguiente producto interno:

$$\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} b_k,$$

donde

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k.$$

12. Ejercicio. Demuestre que la función $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{P}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definida mediante la siguiente regla es un producto interno en $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(x)} g(x)\, dx \qquad \forall f, g \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C}).$$

Para mostrar que $\langle f, f\rangle > 0$ para cualquier $f \neq 0$, puede basarse en dos hechos:

1. Corolario de la unicidad de la interpolación polinomial: si $f \in \mathcal{P}(\mathbb{C})n$ y $f(x) = 0$ para cualquier $x \in (0, 1)$, entonces f es el polinomio cero.

2. Por propiedades de funciones continuas: si $x_0 \in (0, 1)$ y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un $\delta > 0$ tal que $(-\delta, \delta) \subset (0, 1)$ y $|f(x)| \geq \delta$ para todo $x \in (-\delta, \delta)$.

13. Definición (matriz adjunta). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces la matriz *transpuesta conjugada* de A se denota por A^* y se llama la *matriz adjunta* de A:

$$A^* \coloneqq \overline{A}^\top = \left[\, \overline{A_{k,j}} \,\right]_{k,j=1}^{n,m}.$$

Otras notaciones: $A^\dagger$, A^H (*hermitiana conjugada*). Es fácil ver que

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad (\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*, \qquad (AB)^* = B^* A^*, \qquad (A^*)^* = A.$$

14. Ejercicio. Demuestre que la siguiente función $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ es un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^* B).$$

Indicación: antes de demostrar que $\langle A, A\rangle > 0$ para toda matriz no nula A, exprese $\langle A, B\rangle$ y $\langle A, A\rangle$ en términos de las entradas de A y B.

Ejemplos de espacios con producto interno de dimensión infinita

15. Ejemplo. Espacio $C([a,b],\mathbb{C})$ de todas las funciones continuas $[a,b] \to \mathbb{C}$ con el siguiente producto interno:

$$\langle f, g\rangle = \int\limits_a^b \overline{f(x)}g(x)\,dx.$$

16. Ejemplo. Espacio $F(\mathbb{N})$ que consiste de todas las sucesiones que son cero a partir de cierto índice:

$$F(\mathbb{N}) = \{a = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}\colon\quad \exists m \in \mathbb{N}\quad \forall k \geq m \quad a_k = 0\},$$

con el producto interno

$$\langle a, b\rangle = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{a_k} b_k.$$

Notemos que la última suma contiene sólo un número finito de sumandos distintos de cero.

17. Ejemplo que se estudia en el curso de análisis funcional. Espacio $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$ consiste de todas las sucesiones $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que cumplen con la condición

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty.$$

El producto interno en ℓ^2 se define mediante la siguiente regla:

$$\langle a, b\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} b_n.$$

Usando las condiciones que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 < +\infty$ y $\sum_{n\in\mathbb{N}} |b_n|^2 < +\infty$ es posible demostrar que la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} b_n$ converge.