Forma binomial de números complejos (ejercicios)

Objetivos. Mostrar que los números reales x se pueden identificar con números complejos de la forma $(x, 0)$, y cada número complejo (x, y) se puede escribir como $x + \mathrm{i}\, y$, donde $\mathrm{i} = (0, 1)$. Esta expresión se conoce como la *forma algebraica/rectangular/binómica/binomial*.

Requisitos. Propiedades de la adición y multiplicación de números reales. Construcción de números complejos (como pares ordenados de números reales).

El conjunto $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ y operaciones en $\mathbb{C}$ (repaso)

1. Definición de la igualdad de pares ordenados. Sean (a, b) y (u, v) dos pares ordenados de números reales, esto es,

$$(a, b) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, \qquad (u, v) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2.$$

Si dice que (a, b) y (u, v) son *iguales* y se escribe $(a, b) = (u, v)$,

si y sólo si, $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$ y $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$. Lo mismo con símbolos:

$$(a, b) = (u, v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \quad \wedge \quad \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Ejercicio. Encuentre $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $(3p, 7) = (24, q + 5)$.

Solución. Por la definición de la igualdad de pares ordenadas, la ecuación dada es equivalente al siguiente sistema de dos ecuaciones para números reales:

$$3p = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad \wedge \qquad 7 = \underbrace{\qquad\quad}_{?}.$$

La primera ecuación se satisface con $p = \underbrace{\quad}_{?}$, y la segunda con $q = \underbrace{\quad}_{?}$.

Respuesta: $p = \underbrace{\quad}_{?}$, $q = \underbrace{\quad}_{?}$. □

3. Definición de las operaciones con números complejos. Dados dos números complejos $c = (a, b)$ y $w = (u, v)$, su *suma* y *producto* se definen mediante las siguientes reglas:

$$c + w := \Big(\qquad\qquad , \qquad\qquad \Big), \qquad cw := \Big(\qquad\qquad\qquad , \qquad\qquad\qquad \Big).$$

Por ejemplo,

$$(3, -5) + (1, 7) = (\qquad , \qquad),$$
$$(3, -5) \cdot (1, 7) = (3 + 35, \qquad\qquad) = (\qquad\quad , 16).$$

Encaje canónico de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

4. Definición del encaje canónico de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$. Definimos el mapeo $E\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mediante la regla

$$E(x) \coloneqq (x, 0).$$

En otras palabras, cada número real x se transforma en el número complejo $(x, 0)$.
Por ejemplo,

$$E(7) = (7, 0), \qquad E(-5) = (\qquad , \qquad), \qquad E(\sqrt{3}) = (\qquad , \qquad).$$

5. Funciones inyectivas (repaso). La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla $f(x) = x^3$ es *inyectiva*, porque la igualdad $f(x) = f(a)$ es posible solamente cuando $x = a$.

La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla $g(x) = x^4$ *no es inyectiva*, porque la igualdad $g(x) = g(a)$ se puede satisfacer con x y a diferentes:

$$g(-1) = (-1)^4 = \underbrace{\qquad}_{?} = (\underbrace{\qquad}_{?})^4 = g(\underbrace{\qquad}_{?}).$$

6. Proposición: la función $\boldsymbol{E}$ es inyectiva. $E(a) = E(x)$ solamente cuando $a = x$.

Demostración. Supongamos que $a, x \in \mathbb{R}$ y $E(a) = E(x)$.
Recordando la definición de E podemos escribir la última igualdad en la forma

$$(\quad , \quad) = (\quad , \quad).$$

Por la definición de la igualdad de pares ordenados,

$$\underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?} \qquad \wedge \qquad \underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

En particular, la primera igualdad nos dice que $\underbrace{\qquad}_{?} = \underbrace{\qquad}_{?}$. □

7. Función $\boldsymbol{E}$ y operaciones aritméticas (ejemplo). Sean $a = 5$, $b = -3$. Entonces

$$E(a + b) = E(5 - 3) = E(\qquad) = (\qquad , \qquad).$$

Por otro lado,

$$E(a) + E(b) = E(5) + E(-3) = (\qquad , \qquad) + (\qquad , \qquad) = (\qquad , \qquad).$$

Ahora trabajemos con el producto:

$$E(ab) = E(5 \cdot (-3)) = E(\qquad) = (\qquad , \qquad).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} E(a)E(b) = E(5)E(-3) &= (\qquad , \qquad)(\qquad , \qquad) \\ &= \big(\quad \cdot \quad - \quad \cdot \quad , \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad \big) \\ &= (\qquad , \qquad) = E(\qquad). \end{aligned}$$

8. Proposición: función $\boldsymbol{E}$ y operaciones aritméticas.
Para cualesquier $a, u \in \mathbb{R}$,

$$E(a+u) = E(a) + E(u), \qquad E(au) = E(a)E(u).$$

Estas igualdades dicen que la función E es *aditiva* y *multiplicativa*.

Demostración. Primero demostremos la propiedad aditiva de la función E. Sean $a, u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} E(a) + E(u) &\overset{(1)}{=\!=} (\quad\;, 0) + (\quad\;, \quad\;) \overset{(2)}{=\!=} (\quad + \quad\;, \quad + \quad\;) \\ &\overset{(3)}{=\!=} (\qquad\;, \quad\;) \overset{(4)}{=\!=} E(\qquad\;). \end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(1), ($\;$): definición de la función E.

(2): definición de la operación $\underbrace{\qquad}_{?}$ en $\mathbb{C}$.

(3): propiedad neutra del número real $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Ahora demostremos la propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ de la función E.

Sean $a, u \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\begin{aligned} E(a)E(u) &\overset{(1)}{=\!=} (\quad\;, 0)(\quad\;, 0) \overset{(2)}{=\!=} (\quad \cdot \quad - \quad \cdot \quad\;, \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad\;) \\ &\overset{(3)}{=\!=} (\quad\;, \quad\;) \overset{(4)}{=\!=} E(\quad\;). \end{aligned}$$

Justificación de los pasos:

(1), (4):

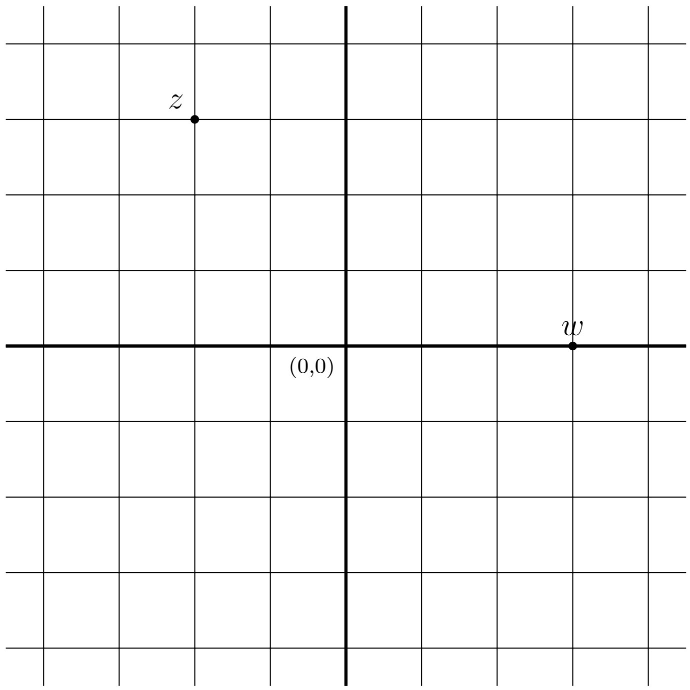
(2):

(3): propiedades del número real 0. $\square$

9. Resumen. La función E es inyectiva, es decir, E transforma números reales diferentes en números complejos diferentes. Además E transforma la suma de dos números reales en la suma de los números complejos correspondientes, y el producto de dos números reales en el producto de dos números complejos correspondientes. Por eso a partir de este momento

$$\boxed{\text{identificamos cada número real } x \text{ con el número complejo } (x, 0).}$$

10. Números reales en el plano complejo. Recordamos que cada número complejo (a, b) se puede ver como el punto del plano cartesiano con coordenadas a y b.



$z = (\quad , \quad)$

$w = (\quad , \quad) = 3.$

Marque los números complejos en el plano:

$(4, -1)$

$-2 = (\quad , \quad)$

Resumen: los números reales en el plano complejo ocupan el eje $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{de abscisas/de ordenadas}}$.

11. La unidad imaginaria. Se denota por i el número complejo $(0, 1)$:

$$\boxed{\mathrm{i} = (0, 1).}$$

12. Proposición: propiedad principal de la unidad imaginaria.
Calculemos el cuadrado de este número complejo:

$$\mathrm{i}^2 = (0, 1)(0, 1) = (\qquad\qquad , \qquad\qquad) = (-1, 0).$$

Recordando la identificación de x con $(x, 0)$, podemos escribir que

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1.}$$

13. Multiplicación de números reales por números complejos (ejemplo).

$$7 \cdot (-3, 2) = (\quad , \quad)(-3, 2) = (\qquad - \qquad , \qquad + \qquad) = (\qquad , \qquad).$$

14. Proposición: multiplicación de números reales por números complejos.
Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $(a, b) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$x(a, b) = (xa, xb).$$

Demostración.

$$x(a,b) \overset{(1)}{=\!=} (x,0)(a,b) \overset{(2)}{=\!=} (\quad\cdot\quad - \quad\cdot\quad, \quad\cdot\quad + \quad\cdot\quad) \overset{(3)}{=\!=} (\qquad, \qquad).$$

Justificación:

(1) Identificación del número real x con el número complejo $(x, 0)$.

(2)

(3) Propiedades del número real $\underbrace{\qquad}_{?}$. $\square$

15. Forma binomial (forma algebraica) de números complejos, ejemplos.

$$(-7,3) = (-7,0) + (0,3) = (7,0) + 3 \cdot (0,1) = 7 + 3\,\mathrm{i};$$

$$(4,9) =$$

16. Proposición: forma binomial de números complejos.
Sea $(a, b) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(a, b) = a + b\,\mathrm{i}\,.$$

Demostración.

$$(a,b) \overset{(1)}{=\!=} (a,0) + (\quad,\quad) \overset{(2)}{=\!=} a + (0,b) \overset{(3)}{=\!=} a + b(\quad,\quad) \overset{(4)}{=\!=} a + b \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Justificación:

(1) Definición de la operación $\underbrace{\qquad}_{?}$ en $\mathbb{C}$.

(2) Identificación de a con el par ordenado $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$.

(3) Fórmula para multiplicar números reales por números $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$.

(3) Notación i para el par ordenado $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$. $\square$

17. Operaciones con números complejos en la forma binomial. Ya sabemos que la adición y multiplicación de números complejos satisfacen las propiedades asociativas y conmutativas y estás relacionadas entre sí por la propiedad distributiva. Estas propiedades y la igualdad

$$\mathrm{i}^2 = \underbrace{\qquad}_{?}$$

son suficientes para calcular la suma y el producto de números complejos, sin recordar la definición original (con pares ordenados).

$$(a + b\,\mathrm{i}) + (u + v\,\mathrm{i}) = (\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) + (\underbrace{\qquad\qquad}_{?})\,\mathrm{i}\,.$$

$$(a + b\,\mathrm{i})(u + v\,\mathrm{i}) = au + av\,\mathrm{i} + \underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\,\mathrm{i}^2 = \big(\underbrace{\qquad}_{?} - bv\big) + \big(\underbrace{\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad}_{?}\big)\,\mathrm{i}\,.$$

Resumiendo,

$$(a + b\,\mathrm{i})(c + d\,\mathrm{i}) =$$

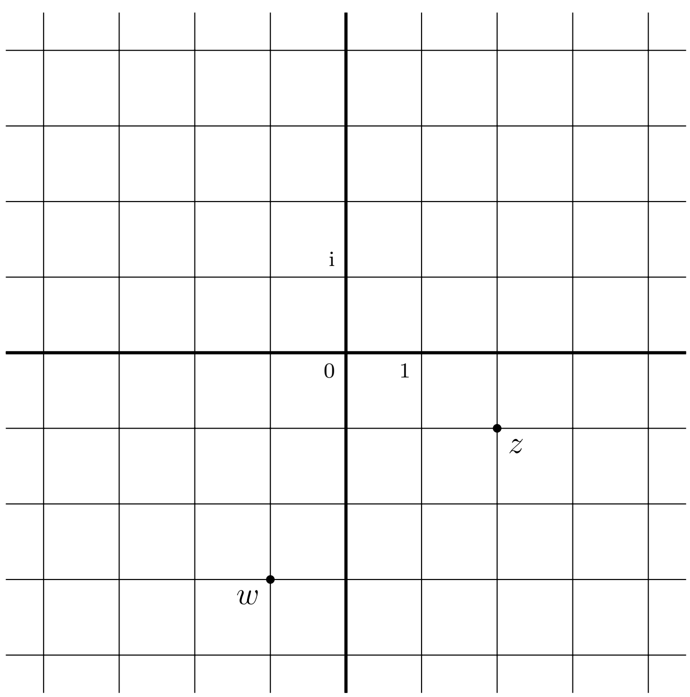
18. Ejemplos.

$$(3 + 7\,\mathrm{i})(-2 + 5\,\mathrm{i}) = \qquad\qquad = -41 + \mathrm{i};$$

$$(5 - 6\,\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) = \qquad\qquad = 16 - 7\,\mathrm{i};$$

$$(-1 + 2\,\mathrm{i})(4 - 3\,\mathrm{i}) = \qquad\qquad 2 + 11\,\mathrm{i}\,.$$

19. Números complejos en el plano complejo.



Escribir en la forma binomial:

$w = (\quad , \quad)$

$z = (\quad , \quad)$

Marque los números complejos en el plano:

$3 + 2\,\mathrm{i}$

-1

$2\,\mathrm{i}$

$-3\,\mathrm{i}$