Complejo conjugado

(ejercicios)

Objetivos. Definir el complejo conjugado de un número complejo. Estudiar propiedades de la conjugación compleja.

Requisitos. Propiedades de la adición y multiplicación de números reales, forma binomial (algebraica) de números complejos.

1. Definición: complejo conjugado. Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Entonces el *complejo conjugado* de z, denotado por $\overline{z}$, es el número complejo $(x, -y)$.

2. Ejemplos.

$$\overline{(2,-7)} = (2,7), \qquad \overline{(3,5)} =$$

$$\overline{(a,b)} = \qquad \overline{(6,0)} =$$

$$\overline{(0,4)} = \qquad \overline{(-4,1)} =$$

3. Complejo conjugado en forma binomial. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\overline{x + \mathrm{i}\, y} = \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Ejemplos:

$$\overline{(3 + 4\,\mathrm{i})} = \qquad \overline{(-7 + 5\,\mathrm{i})} =$$

$$\overline{6} = \qquad \overline{(3\,\mathrm{i})} =$$

4. La parte real e imaginaria de un número complejo (repaso).
Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\operatorname{Re}(z) := x, \qquad \operatorname{Im}(z) := y.$$

Ejemplos:

$$\operatorname{Re}(3 + \mathrm{i}\,4) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \operatorname{Im}(3 + \mathrm{i}\,4) = \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$\operatorname{Re}(5) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \operatorname{Im}(5) = \underbrace{\qquad}_{?},$$

$$\operatorname{Re}(4\,\mathrm{i}) = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad \operatorname{Im}(4\,\mathrm{i}) = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

5. Valor absoluto de un número complejo.
Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Entonces el *valor absoluto* (o la *norma*) de z se define como

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Por ejemplo,

$$|3 + 7\,\mathrm{i}\,| = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}.$$

Nótese que

$$|3 + 7\,\mathrm{i}\,| \neq \sqrt{3^2 + (7\,\mathrm{i})^2}.$$

6. Interacción de un número complejo con su valor absoluto.
Sea $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$z + \overline{z} = (x + \mathrm{i}\,y) + (x - \mathrm{i}\,y) = \underbrace{\qquad\quad}_{?} = 2\,\mathrm{Re}(z);$$

$$z - \overline{z} =$$

$$z\overline{z} = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = |z|^2.$$

7. Cojugación compleja. La *conjugación compleja* es la función que a cada número $z \in \mathbb{C}$ lo transforma en su complejo conjugado $\overline{z}$.

8. Proposición: propiedades algebraicas de la conjugación compleja.
Sean $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $w = (u, v) \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}.$$

Demostración. Primero demostremos que el complejo conjugado de la suma $z + w$ es la suma de los complejos conjugados:

$$\overline{z + w} \overset{(1)}{=\!=} \overline{(x, y) + (u, v)} \overset{(2)}{=\!=} \overline{(x + u, y + v)} \overset{(3)}{=\!=} \big(x + u, -(\underbrace{\qquad\quad}_{?})\big)$$

$$\overset{(4)}{=\!=} \big(x + u, \underbrace{\qquad\quad}_{?} + \underbrace{\qquad\quad}_{?}\big) \overset{(5)}{=\!=} (\qquad,\qquad) + (\qquad,\qquad)$$

$$\overset{(6)}{=\!=} \overline{(\qquad,\qquad)} + \overline{(\qquad,\qquad)} \overset{(7)}{=\!=} \overline{z} + \overline{w}.$$

Escriba la justificación de todos los pasos:

(1), (7): nuestra notación para las componentes de z y w.

(2), (5):

(3), (6):

(4): propiedades de la adición de números reales.

Escriba la demostración de la segunda parte: el complejo conjugado del producto zw es el producto de los complejos conjugados. $\square$