Polinomio característico de un operador lineal en un espacio de dimensión finita

Objetivos. Definir el polinomio característico de un operador lineal que actúa en un espacio vectorial de dimensión finita, estudiar algunas de sus propiedades.

Requisitos. Determinante de una matriz, determinante de un operador lineal que actúa en un espacio vectorial de dimensión finita.

En esta sección suponemos que V es un espacio vectorial **de dimensión finita** sobre un campo $\mathbb{F}$. Denotamos por n la dimensión de V.

1. Determinante de un operador lineal que actúa en un espacio vectorial de dimensión finita (repaso). Sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de V. Entonces

$$\det(T_{\mathcal{A}}) = \det(T_{\mathcal{B}}).$$

Demostración:

$$\begin{aligned}\det(T_{\mathcal{B}}) &= \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) = \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}) \det(T_{\mathcal{A}}) \det(P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \\ &= \det(P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}) \det(T_{\mathcal{A}}) = \det(I_n) \det(T_{\mathcal{A}}) = \det(T_{\mathcal{A}}).\end{aligned}$$

Conclusión: el determinante de la matriz asociada a una transformación lineal no depende de base. Por lo tanto, la siguiente definición es correcta: definimos $\det(T)$ como $\det(T_{\mathcal{B}})$, donde $\mathcal{B}$ es *alguna* base de V.

2. Definición (polinomio característico de un operador lineal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces el polinomio

$$\mathrm{C}_T(\lambda) \coloneqq \det(\lambda I - T)$$

se llama el *polinomio característico* de T.

Recordemos que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se identifica con el operador $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ que actúa mediante la regla $T_A(x) \coloneqq Ax$. La matriz asociada al operador T_A respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ es la matriz original A, $\det(T_A)$ coincide con $\det(A)$ y $\det(\lambda I - T_A)$ coincide con $\det(\lambda I_n - A)$.

3. Definición (polinomio característico de una matriz cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces le polinomio característico de A se define como

$$\mathrm{C}_A(\lambda) \coloneqq \det(\lambda I_n - A).$$

4. Promesas para futuro. En las siguientes clases vamos a demostrar que el conjunto de las raíces de C_T coincide con el *espectro* de T y con el conjunto de los *valores propios* de T.

5. Observación. Algunos autores definen el polinomio característico de T como

$$\det(T - \lambda I).$$

Notemos que la matriz asociada a $\lambda I - T$ es de orden $n = \dim(V)$, y al cambiar el signo de todos los renglones el determinante se multiplica por $(-1)^n$:

$$\det(T - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - T).$$

En particular, los polinomios $\det(T - \lambda I)$ y $\det(\lambda I - T)$ tienen las mismas raíces.

6. Ejemplo (polinomio característico de una matriz general cuadrada 2 por 2). Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{F})$. Calculemos C_A:

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - A_{1,1} & -A_{1,2} \\ -A_{2,1} & \lambda - A_{2,2} \end{vmatrix} = (\lambda - A_{1,1})(\lambda - A_{2,2}) - A_{1,2}A_{2,1}$$

$$= \lambda^2 - (A_{1,1} + A_{2,2})\lambda + A_{1,1}A_{2,2} - A_{1,2}A_{2,1} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A).$$

7. Ejercicio. Calcular C_A para una matriz general cuadrada de orden 3.

8. Ejercicio. Calcule C_A, donde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

9. Ejercicio (polinomio caraterístico de una matriz triangular). Calcule C_A, donde $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ o $A \in \mathfrak{lt}_n(\mathbb{F})$.

10. Ejercicio (polinomio característico de la matriz transpuesta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Demuestre que

$$\mathrm{C}_{A^\top} = \mathrm{C}_A\,.$$

11. Ejemplo de cálculo del polinomio caraterístico para una matriz 3×3. Calcular las raíces del polinomio caraterístico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & -13 \\ -4 & 2 & 4 \\ 6 & 10 & -9 \end{bmatrix}.$$

Solución recomendada: usando operaciones elementales.

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (-1)^3 \det(A - \lambda I_3) = -\begin{vmatrix} 10-\lambda & 10 & -13 \\ -4 & 2-\lambda & 4 \\ 6 & 10 & -9-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_3 \mathrel{+}= -R_1} -\begin{vmatrix} 10-\lambda & 10 & -13 \\ -4 & 2-\lambda & 4 \\ \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xlongequal{C_1 \mathrel{+}= C_3} -\begin{vmatrix} -3-\lambda & 10 & -13 \\ 0 & 2-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(-3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Las raíces del polinomio C_A son -3, 2 y 4. □

12. Proposición (polinomio característico es mónico y de grado n). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Entonces el polinomio C_A es mónico (su coeficiente mayor es 1) y tiene grado n.

Demostración. 1. Por la definición del determinante, el $\mathrm{C}_A(\lambda)$ se puede escribir como una suma de $n!$ sumandos, donde cada sumando $s(A, \lambda, \varphi)$ corresponde a una permutación φ del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.

$$\mathrm{C}_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \sum_{\varphi \in S_n} s(A, \lambda, \varphi),$$

donde

$$s(A, \lambda, \varphi) = \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{j=1}^{n} (\lambda I_n - A)_{j,\varphi(j)} = \operatorname{sgn}(\varphi) \prod_{j=1}^{n} (\lambda \delta_{j,\varphi(j)} - A_{j,\varphi(j)}). \tag{1}$$

2. Para la permutación identidad $\varphi = e$ los factores son de la forma $\lambda - A_{j,j}$, así que el sumando correspondiente es

$$s(A, \lambda, e) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - A_{j,j}) = (\lambda - A_{1,1})(\lambda - A_{2,2}) \cdots (\lambda - A_{n,n}).$$

Por lo tanto, $s(A, \lambda, e)$ es un polinomio (de la variable λ) de grado n con coeficiente mayor igual a 1.

3. Si $\varphi \neq e$, entonces no todos los factores del producto (1) contienen λ, y $s(A, \lambda, \varphi)$ es un polinomio de λ de grado $\leq n - 1$.

De 1, 2, 3 sigue C_A es un polinomio mónico de grado n. □

13. Ejercicio. Muestre el término independiente del polinomio C_A es $(-1)^n \det(A)$.

14. Ejercicio. Muestre que si $\varphi \in S_n$ y $\varphi \neq e$, entonces $s(A, \lambda, e)$ tiene no más de $n - 2$ entradas de la diagonal principal de A y por lo tanto es un polinomio de grado $\leq n - 2$.

15. Tarea adicional. Muestre que el coeficiente de λ^{n-1} en el polinomio C_A es $-\operatorname{tr}(A)$.