Cambio de la matriz asociada a una transformación lineal al cambiar las bases del dominio y contradominio

Objetivos. Estudiar el cambio de la matriz asociada a una transformación lineal al cambiar las bases del dominio y contradominio.

Requisitos. Matriz asociada a una transformación lineal, cambio de base, unicidad de la representación matricial de una transformación lineal.

1. Repaso breve. En el tema anterior definimos la matriz asociada a una transformación lineal respecto a un par de bases, luego demostramos la fórmula

$$(Tv)_{\mathcal{B}} = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}}$$

y la unicidad de representación matricial: si

$$\forall v \in V \qquad (Tv)_{\mathcal{B}} = C v_{\mathcal{A}},$$

entonces $C = T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$. En este tema seguimos estudiando la correspondencia entre transformaciones lineales y matrices.

2. Teorema (cambio de la matriz asociada a una transformación lineal al cambiar las bases del dominio y del contradominio). Sean V, W algunos espacios vectoriales de dimensiones finitas sobre un campo $\mathbb{F}$, sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$, sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ bases de V y sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases de W. Entonces

$$T_{\mathcal{B}',\mathcal{A}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}.$$

En otra forma,

$$T_{\mathcal{B}',\mathcal{A}'} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}^{-1} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}.$$

Demostración. Para un vector arbitrario $v \in V$,

$$(Tv)_{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} (Tv)_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} v_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} v_{\mathcal{A}'}.$$

Por el teorema de la unicidad de la representación matricial de una transformación lineal,

$$T_{\mathcal{B}',\mathcal{A}'} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}. \qquad \square$$

3. Corolario (cambio de la matriz asociada a un operador lineal al cambiar la base del espacio). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sea $T \in \mathcal{L}(V)V$ y sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Entonces

$$T_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}},$$

esto es,

$$T_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

Demostración. Es un caso particular del teorema, cuando el contradominio coincide con el dominio $W = V$. Aquí en vez de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ escribimos $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. □

4. Ejercicio. Calcular la matriz del operador $D\colon \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ en las bases (f_0, f_1) y (f_0, f_1, f_2), donde

$$f_0(x) = 1, \qquad f_1(x) = x + 5, \qquad f_2(x) = \frac{(x+5)^2}{2}.$$

5. Ejemplo. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ algunas bases de un espacio vectorial V y sea $T\colon V \to V$ una transformación lineal. Dadas la matriz $T_{\mathcal{A}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{A}$ y la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, calcular la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$, comprobar la igualdad $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = I$ y calcular la matriz $T_{\mathcal{B}}$ asociada a T respecto a la base $\mathcal{B}$.

$$T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero calculemos la matriz inversa de la matriz $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -3R_2]{R_1 \mathrel{+}= -R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{+}= -R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 \end{array}\right].$$

De aquí

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = I_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1+1 & 1-4+3 & 0-1+1 \\ 0+1-1 & 0+4-3 & 0+1-1 \\ -1-2+3 & -1-8+9 & 0-2+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

Ahora podemos calcular la matriz $T_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4-1+3 & -1-2-2 & 1+2+2 \\ 0+1-3 & 0+2+2 & 0-2-2 \\ -4-2+9 & 1-4-6 & -1+4+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -9 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$T_{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} T_{\mathcal{A}}) P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 5 \\ -2 & 4 & -4 \\ 3 & -9 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-5+5 & 6-20+15 & 0-5+5 \\ -2+4-4 & -2+16-12 & 0+4-4 \\ 3-9+9 & 3-36+27 & 0-9+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Respuesta:

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}.$$

□