Cambio de las coordenadas de un funcional lineal al cambiar la base del espacio

Objetivos. Comprender cómo se cambiar las coordenadas de un funcional lineal $\varphi \in V^*$ al cambiar la base del espacio V.

Requisitos. Cambio de base, matriz de transición, base dual, representación matricial de un funcional lineal, unicidad de la representación matricial de un funcional lineal.

1. Matriz de transición (repaso). Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{A}' = (a_1', \ldots, a_n')$ bases de un espacio vectorial V. Entonces la *matriz de transición* se define como la matriz cuyas columnas son las vectores columnas de coordenadas de los vectores $a_1', \ldots, a_n'$ respecto a la base $\mathcal{A}$:

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} = \left[\ (a_1)'_{\mathcal{A}}, \ \ldots, \ (a_n)'_{\mathcal{A}} \ \right].$$

2. Representación matricial de un funcional lineal (repaso). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V. Denotemos por $\mathcal{F}$ a la base dual asociada a $\mathcal{A}$. Entonces para todo $\varphi \in V^*$ y todo $v \in V$,

$$\varphi(v) = \varphi_{\mathcal{F}}^{\top} v_{\mathcal{A}}.$$

3. Unicidad de la representación matricial de un funcional lineal (repaso). Sea V un EV/$\mathbb{F}$, sea $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y sea $\mathcal{F} = (\chi_1, \ldots, \chi_n)$ la base dual a $\mathcal{A}$. Supongamos que $\varphi \in V^*$, $c \in \mathbb{F}^n$ y para todo $v \in V$

$$\varphi(v) = c^{\top} v_{\mathcal{A}}.$$

Entonces $\varphi_{\mathcal{F}} = c$.

4. Proposición (cambio de las coordenadas de un funcional lineal al cambiar la base del espacio; cambio de la base dual al cambiar la base del espacio). Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}'$ bases de un espacio vectorial V y sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F}'$ las bases duales correspondientes. Entonces para todo $\varphi \in V^*$ se tiene:

$$\varphi_{\mathcal{F}'} = P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^{\top} \varphi_{\mathcal{F}}, \tag{1}$$

donde $P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}$ es la matriz de transición. Esto significa que la matriz de cambio de bases duales se puede calcular de la siguiente manera:

$$P_{\mathcal{F}',\mathcal{F}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^{\top}. \tag{2}$$

Demostración. Para todo $v \in V$ se tiene:

$$\varphi_{\mathcal{F}'}^{\top} v_{\mathcal{A}'} = \varphi(v) = \varphi_{\mathcal{F}}^{\top} v_{\mathcal{A}} = \varphi_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'} v_{\mathcal{A}'} = \left(P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^{\top} \varphi_{\mathcal{F}} \right)^{\top} v_{\mathcal{A}'}.$$

Por la unicidad de representación matricial de funcionales lineales, $\varphi_{\mathcal{F}'} = P_{\mathcal{A},\mathcal{A}'}^{\top} \varphi_{\mathcal{F}}$. Luego por la unicidad de la matriz que representa el cambio de coordenadas, de (1) sigue (2). □

5. Ejemplo. Sea $\Gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ la base dual a la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ y sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la base dual a la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$, donde

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I. Calcule las matrices de transición $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, $P_{\Psi,\Gamma}$ y $P_{\Gamma,\Psi}$.

II. Escriba los funcionales ψ_1, ψ_2, ψ_3 de manera explícita y compruebe que $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$.

III. Calcule las coordenadas del funcional $\varphi(x) = 2x_1 + 6x_2 - x_3$ respecto a la base Ψ y haga la comprobación.

Solución. I. Como $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, las columnas de la matriz $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ son simplemente los vectores b_1, b_2, b_3:

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} (b_1)_{\mathcal{E}}, & (b_2)_{\mathcal{E}}, & (b_3)_{\mathcal{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1, & b_2, & b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por la fórmula (2) del cambio de la base dual,

$$P_{\Psi,\Gamma} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}^{\top} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos la matriz $P_{\Gamma,\Psi}$ como la inversa a la matriz $P_{\Psi,\Gamma}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += -5R_1]{R_2 += -4R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & -9 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 += -2R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -5 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 += 5R_3]{R_1 += -2R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 += -2R_2]{R_1 += R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 11 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -19 & 16 & -9 \end{array}\right].$$

Por lo tanto

$$P_{\Gamma,\Psi} = P_{\Psi,\Gamma}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 3 \\ 11 & -9 & 5 \\ -19 & 16 & -9 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

II. Según el resultado (3),

$$\psi_1 = 6\gamma_1 + 11\gamma_2 - 19\gamma_3, \qquad \psi_2 = -5\gamma_1 - 9\gamma_2 + 16\gamma_3, \qquad \psi_3 = 3\gamma_1 + 5\gamma_2 - 9\gamma_3. \tag{4}$$

En otras palabras, para todo $x \in \mathbb{R}^3$

$$\psi_1(x) = 6x_1 + 11x_2 - 19x_3, \quad \psi_2(x) = -5x_1 - 9x_2 + 16x_3, \quad \psi_3(x) = 3x_1 + 5x_2 - 9x_3.$$

Comprobemos las relaciones $\psi_i(b_j) = \delta_{i,j}$. Por ejemplo, $\psi_1(b_1)$ se calcula como

$$\psi_1(b_1) = 6\gamma_1(b_1) + 11\gamma_2(b_1) - 19\gamma_3(b_1) = 6 \cdot 1 + 11 \cdot 3 - 19 \cdot 2 = 6 + 33 - 38 = 1.$$

Calculamos $\psi_i(b_j)$ para todos $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$\begin{array}{lll}
\psi_1(b_1) = 6 + 33 - 38 = 1, & \psi_1(b_2) = 24 + 33 - 57 = 0, & \psi_1(b_3) = 30 - 11 - 19 = 0, \\
\psi_2(b_1) = -5 - 27 + 32 = 0, & \psi_2(b_2) = -20 - 27 + 48 = 1, & \psi_2(b_3) = -25 + 9 + 16 = 0, \\
\psi_3(b_1) = 3 + 15 - 18 = 0, & \psi_3(b_2) = 12 + 15 - 27 = 0, & \psi_3(b_3) = 15 - 5 - 9 = 1.
\end{array}$$

III. Consideremos el funcional

$$\varphi(x) = 2x_1 + 6x_2 - x_3.$$

Para calcular φ_Γ evaluamos φ en los vectores e_1, e_2, e_3:

$$\varphi(e_1) = 2, \qquad \varphi(e_2) = 6, \qquad \varphi(e_3) = -1.$$

También podemos notar que

$$\varphi(x) = (2\gamma_1 + 6\gamma_2 - \gamma_3)(x).$$

De todas manera concluimos que

$$\varphi_\Gamma = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos φ_Ψ usando la matriz de cambio $P_{\Psi,\Gamma}$:

$$\varphi_\Psi = P_{\Psi,\Gamma}\varphi_\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 18 - 2 \\ 8 + 18 - 3 \\ 10 - 6 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 23 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$\varphi = 18\psi_1 + 23\psi_2 + 3\psi_3. \tag{5}$$

Comprobación usando (5) y (4):

$$\begin{aligned}
\varphi &= 18(6\gamma_1 + 11\gamma_2 - 19\gamma_3) + 23(-5\gamma_1 - 9\gamma_2 + 16\gamma_3) + 3(3\gamma_1 + 5\gamma_2 - 9\gamma_3) \\
&= (108 - 115 + 9)\gamma_1 + (198 - 207 + 15)\gamma_2 + (-342 + 368 - 27)\gamma_3 \\
&= 2\gamma_1 + 6\gamma_2 - \gamma_3. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

□