Cambio de base

Objetivos. Estudiar la relación entre las coordenadas de un vector en dos bases.

Requisitos. Definición de una base, multiplicación de una matriz por un vector, delta de Kronecker.

1. Definición (vector de coordenadas de un vector en una base). Sean V un EV/$\mathbb{F}$, $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V y v un vector de V. Como $\mathcal{B}$ es una base, existe una tupla

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

tal que

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

El vector columna

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

se llama *vector de coordenadas del vector v en la base $\mathcal{B}$* y se denota por $v_{\mathcal{B}}$ o $[v]_{\mathcal{B}}$.

Matriz de cambio de base

2. Definición (matriz de transición = matriz de cambio de base). Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bases de V. La *matriz de transición de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$* llamada también *matriz de cambio de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$* es la matriz $n \times n$ cuyas columnas son vectores columnas de las coordenadas de los vectores $b_1, \ldots, b_n$ en la base $\mathcal{A}$:

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \coloneqq \big[(b_1)_{\mathcal{A}}, \ldots, (b_n)_{\mathcal{A}}\big].$$

3. Otra forma de la definición. Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ bases de V. Para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$ denotemos por $t_{1,j}, \ldots, t_{n,j}$, a las coordenadas del vector b_j en base $\mathcal{A}$:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j} a_i. \tag{1}$$

Entonces la matriz $\big[t_{i,j}\big]_{i,j=1}^{n}$ se llama *matriz de transición de $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$* y se denota por $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$:

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} \coloneqq \big[t_{i,j}\big]_{i,j=1}^{n}.$$

4. Ejemplo. Sea V un EV de dimensión 2, $\mathcal{B} = (a_1, a_2)$ y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ bases de V. Supongamos que

$$b_1 = 3a_1 - 4a_2, \qquad b_2 = a_1 + 5a_2.$$

Entonces

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

5. Observación. En la igualdad (1) escribamos el producto del vector por escalar en otro orden:

$$b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i t_{i,j},$$

La igualdad obtenida significa que el renglón que consiste en los vectores $(b_1, \ldots, b_n)$ es igual al producto del renglón $(a_1, \ldots, a_n)$ por la matriz $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$:

$$(b_1, \ldots, b_n) = (a_1, \ldots, a_n) P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

De manera breve,

$$\mathcal{B} = \mathcal{A} P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}.$$

6. Proposición (cambio de coordenadas al cambiar la base). Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bases de V, $v \in V$. Entonces

$$v_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}.$$

Demostración. Sea $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \left[t_{i,j}\right]_{i,j=1}^{n}$, esto es,

$$\forall j \in \{1, \ldots, n\} \qquad b_j = \sum_{i=1}^{n} t_{i,j} a_i.$$

Sea $v_{\mathcal{A}} = \left[x_i\right]_{i=1}^{n}$, $v_{\mathcal{B}} = \left[y_j\right]_{j=1}^{n}$. Entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} t_{i,j} y_j \right) a_i.$$

Por otro lado,

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i.$$

Las coordenadas del vector v en la base $\mathcal{A}$ se determinan de manera única, por lo tanto

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\} \qquad x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{i,j} y_j.$$

Pero esto significa que $v_{\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}}$. $\square$

7. Ejemplo. En el espacio $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ los polinomios $e_0(x) = 1$ y $e_1(x) = x$ forman la base canónica $\mathcal{E}$, y los polinomios $f_0(x) = -1 + x$, $f_1(x) = 2 - x$ forman otra base $\mathcal{F}$. Consideremos el polinomio $h = 3f_0 + f_1$.

$$h_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad h_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

En realidad, $h(x) = 3(-1 + x) + (2 - x) = -1 + 2x$, esto es, $h = -e_0 + 2e_1$.

Unicidad de la matriz que representa el cambio de coordenadas

8. Lema. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea $q \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos por e_q al vector del espacio $\mathbb{F}^n$ cuya q-ésima componente es 1 y todas las demás son 0:

$$e_q = \left[\delta_{q,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Entonces el producto Ae_q es igual a la q-ésima columna de la matriz A:

$$Ae_q = A_{*,q}.$$

Demostración. Apliquemos la definición del producto de una matriz por un vector y la propiedad principal del símbolo de Kronecker:

$$(Ae_q)_i = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}(e_q)_j = \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}\delta_{q,j} = A_{i,q}.$$

El índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ es arbitrario, por lo tanto $Ae_q = A_{i,*}$. $\square$

9. Ejemplo.

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

10. Proposición (criterio de la igualdad de dos matrices). Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ tales que $Ax = Bx$ para todo $x \in \mathbb{F}^n$. Entonces $A = B$.

Demostración. Elijamos arbitrariamente $q \in \{1, \ldots, n\}$ y pongamos $x = e_q = \left[\delta_{q,j}\right]_{j=1}^{n}$. Entonces

$$A_{*,q} = Ax = Bx = B_{*,q}.$$

Como q es arbitrario, $A = B$. $\square$

11. Proposición (unicidad de la matriz que representa el cambio de coordenadas). Sean $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ bases de V. Supongamos que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ es una matriz tal que para todo $v \in V$

$$v_{\mathcal{A}} = M v_{\mathcal{B}}.$$

Entonces $P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = M$.

Demostración. Usemos la hipótesis de la proposición y la fórmula del cambio de coordenadas:

$$M v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} v_{\mathcal{B}} \qquad \forall v \in V. \tag{2}$$

Para todo $x \in \mathbb{F}^n$ existe un $v \in V$ tal que $v_{\mathcal{B}} = x$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j.$$

Por lo tanto podemos escribir (2) de la siguiente manera:

$$Mx = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} x \qquad \forall x \in \mathbb{F}^n.$$

Aplicamos el criterio de igualdad de matrices y obtenemos que $M = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$. $\square$

12. Teorema (sobre la composición de cambios de base). Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ bases de un espacio vectorial V. Entonces

$$P_{\mathcal{A},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

13. Observación. Sea $\mathcal{B}$ una base de V. Entonces es fácil ver que $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I$.

14. Corolario. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ bases de V. Entonces

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = P_{\mathcal{A},\mathcal{B}}^{-1}.$$

15. Ejercicio. Demostrar el teorema y el corolario.

16. Ejercicio. En el espacio $\mathbb{R}^3$ consideramos la base canónica $\mathcal{E}$, otra base $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ y un vector v:

$$f_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad f_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Escriba $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}}$, calcule $P_{\mathcal{F},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = I$. Calcule $v_{\mathcal{F}}$ por la fórmula $v_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F},\mathcal{E}} v_{\mathcal{E}}$ y haga la comprobación por la fórmula $v_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{F}} v_{\mathcal{F}}$.

17. Ejemplo. Sea $\mathcal{E}$ la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$ y sea $\mathcal{B}$ la base que consta de los vectores dados b_1, b_2, b_3. Escriba la matriz de cambio $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$, calcule la matriz de cambio $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y haga la comprobación: $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_3$.

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Como $\mathcal{E}$ es la base canónica, $v_{\mathcal{E}} = v$ para todo $v \in \mathbb{R}^3$. Por ejemplo,

$$b_1 = 1e_1 + 2e_2 + 4e_3, \qquad (b_1)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = b_1.$$

Por la definición de la matriz de cambio de base,

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \big[(b_1)_{\mathcal{E}}, (b_2)_{\mathcal{E}}, (b_3)_{\mathcal{E}}\big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculamos la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \mathrel{+}= -2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= -4R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= -1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_1 \mathrel{+}= -R_2 \\ R_3 \mathrel{+}= 2R_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \mathrel{*}= -1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right].$$

Respuesta:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1+2+0 & 1-3+2 & 0+1-1 \\ -2+2+0 & 2-3+2 & 0+1-1 \\ -4+4+0 & 4-6+2 & 0+2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

18. Ejemplo. Sean $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$ las bases $\mathbb{R}^3$ definidas en el ejercicio anterior, y sean u, w vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Calcular $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$, calcular $(u-w)_{\mathcal{E}}$ como $u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}}$, calcular $(u-w)_{\mathcal{B}}$ como $u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}}$. Hacer la comprobación:

$$(u-w)_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}}.$$

Solución. Primero calculemos $u_{\mathcal{B}}$ y $w_{\mathcal{E}}$:

$$u_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} u_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+2+0 \\ 6-6+0 \\ 0+4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$w_{\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} u_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2+0 \\ -2+2+0 \\ -4+4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos las coordenadas de la diferencia respecto a ambas bases:

$$(u-w)_{\mathcal{E}} = u_{\mathcal{E}} - w_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$(u-w)_{\mathcal{B}} = u_{\mathcal{B}} - w_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(u-w)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-2+4 \\ 0-2+4 \\ 0-4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = (u-w)_{\mathcal{E}}. \quad \checkmark \quad \square$$