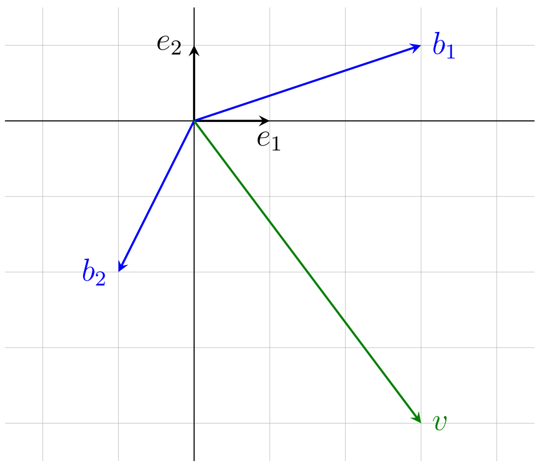
Cambio de base del plano (ejemplo geométrico)

Objetivos. Conocer un ejemplo de cambio de base en el espacio $\mathbb{R}^2$ que identificamos con el plano.

Requisitos. Base, coordenadas de un vector respecto a una base, matriz de cambio de base, cálculo de la matriz inversa, cambio de coordenadas de un vector al cambiar la base del espacio.

Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^2$ consideremos la base canónica $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, la base $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ y el vector v, donde

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$



Vamos a hacer las siguientes tareas con este ejemplo:

I. Escribir $v_{\mathcal{E}}$. Mostrar en el dibujo la expansión de v respecto a la base $\mathcal{E}$.

II. Escribir $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$.

III. Calcular $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$.

IV. Comprobar que $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_2$.

V. Calcular $v_{\mathcal{B}}$ usando la matriz $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ y $v_{\mathcal{E}}$.

VI. Calcular $v_{\mathcal{B}}$ de otra manera, resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

VII. Hacer la comprobación algebraica.

VIII. Hacer la comprobación geométrica.

Solución

1. El vector v se escribe como la siguiente combinación lineal de los vectores e_1 y e_2:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

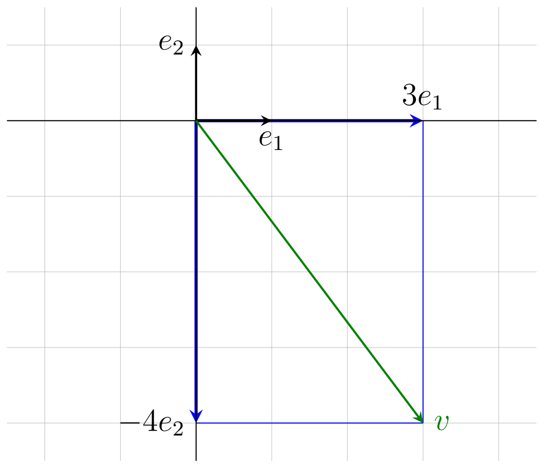
o sea

$$v = 3e_1 + (-4)e_2. \tag{1}$$

Los coeficientes de esta combinación lineal se llaman las *coordenadas del vector v respecto a la base $\mathcal{E}$*. Denotamos por $v_{\mathcal{E}}$ a la columna formada de estas dos coordenadas:

$$v_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Notemos que $v_{\mathcal{E}}$ coincide con v. Esto sucedió porque $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$. El sentido geométrico de la igualdad (1) se muestra en el siguiente dibujo:



2. Los vectores b_1 y b_2 tienen las siguientes expansiones respecto a la base $\mathcal{E}$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3e_1 + e_2, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -e_1 - 2e_2,$$

así que las columnas de sus coordenadas respecto a $\mathcal{E}$ son

$$(b_1)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (b_2)_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

La matriz $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ consta de las columnas $(b_1)_{\mathcal{E}}$ y $(b_2)_{\mathcal{E}}$:

$$P_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Gracias al hecho que $\mathcal{E}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, la columna $(b_1)_{\mathcal{E}}$ coincide con b_1, al columna $(b_2)_{\mathcal{E}}$ coincide con b_2, y $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ consta de las columnas b_1 y b_2.

3. Recordando que $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = P_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = I_2$ concluimos que $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ es la matriz inversa de $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$. Aplicamos el algoritmo común para calcular la matriz inversa:

$$\left[\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -3R_1} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= 1/5} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= 2R_2} \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -3/5 \end{array}\right].$$

Hemos calculado $P_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$:

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{bmatrix}.$$

4. Comprobamos que $P_{\mathcal{E},\mathcal{B}}P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} = I_2$:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} - \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} - \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

5. Calculamos $v_{\mathcal{B}}$ por la fórmula $v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} v_{\mathcal{E}}$:

$$v_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B},\mathcal{E}} v_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{5} + \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} + \frac{12}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

6. Para comprender mejor el concepto de coordenadas, veamos también otro método para calcular las coordenadas de v respecto a la base $\mathcal{B}$. Estamos buscando dos números reales y_1, y_2 que satisfagan la igualdad

$$y_1 b_1 + y_2 b_2 = v.$$

Sustituimos b_1, b_2, v:

$$y_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Escribimos el lado izquierdo de otra manera:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Resolvemos el sistema obtenido:

$$\left[\begin{array}{rr|r} 3 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \mathrel{+}= -3R_1} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= 1/5} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \mathrel{+}= 2R_2} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Obtuvimos la respuesta

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

7. Hacemos la comprobación algebraica que $2b_1 + 3b_2 = v$:

$$2b_1 + 3b_2 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}. \quad \checkmark$$

8. Hacemos la comprobación geométrica que $2b_1 + 3b_2 = v$: