Propiedad bilineal

Ejercicios

Objetivos. Conocer la definición de funcional bilineal. Comprender cómo se aplica un funcional bilineal a combinaciones lineales.

Requisitos. Funcional lineal, propiedad aditiva, propiedad homogénea, combinación lineal, notación para sumas ($\sum$), sumas dobles.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$.

1. Definición (funcional bilineal o forma lineal). Una función $f\colon V \times V \to \mathbb{F}$ se llama *funcional bilineal* o *forma bilineal* si esta función es lineal (es decir, aditiva y homogénea) respecto a cada uno de sus argumentos (mientras el otro argumento está fijo):

$$\forall u, v, w \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(u+v, w) = f(u, w) + \underbrace{\qquad\qquad}_{?};$$

$$\forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(\lambda u, v) = \lambda f(u, v);$$

$$\forall u, v, w \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(u, v+w) = f(u, v) + \underbrace{\qquad\qquad}_{?};$$

$$\forall u, v \in V \quad \forall \lambda \in \underbrace{\qquad}_{?} \qquad f(u, \lambda v) = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

2. Ejemplo. Supongamos que $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ es una función bilineal. Sean $a, b, c \in V$. Entonces

$$f(a+b, 7c) \overset{\text{(i)}}{=\!=} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} + f(b, 7c) \overset{\text{(ii)}}{=\!=} 7f(a, c) + \underbrace{\qquad\qquad}_{?}$$

Justificación de los pasos:

(i) propiedad aditiva respecto al $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿primero o segundo?}}$ argumento;

(ii) propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿aditiva o homogénea?}}$ respecto al $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿primero o segundo?}}$ argumento.

3. Ejemplo. Supongamos que $f\colon V\times V\to\mathbb{R}$ es una función bilineal. Sean $a,b,c\in V$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f(3a,4b+5c) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} f(3a,4b)+\underbrace{\qquad\qquad}_{?} \overset{\text{(ii)}}{=\!=} 3\underbrace{\qquad\qquad}_{?}+\underbrace{\qquad}_{?}f(a,5c) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} 3(4\,f(\underbrace{\qquad}_{?}))+\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} (3\cdot 4)\,f(\underbrace{\qquad}_{?})+\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?} \\
&= 12\underbrace{\qquad\qquad}_{?}+\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.
\end{aligned}
$$

Justificación de los pasos:

(i) propiedad aditiva respecto al $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿primero o segundo?}}$ argumento;

(ii) propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿aditiva o homogénea?}}$ respecto al $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿primer o segundo?}}$ argumento;

(iii) propiedad $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿aditiva o homogénea?}}$ respecto al $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{¿primer o segundo?}}$ argumento;

(iv) propiedad asociativa de la multiplicación $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{¿en }\mathbb{R}\text{ o en }V?}$.

Propiedad lineal respecto al primer argumento

Suponemos que $f\colon V \times V \to \mathbb{F}$ es un funcional bilineal.

4. Sean $a_1, a_2, a_3, b \in V$. Simplifique la expresión:

$$f(a_1 + a_2 + a_3, b) =$$

5. Sean $a_1, \ldots, a_p, b \in V$. Simplifique la expresión:

$$f\left(\sum_{j=1}^{p} a_j, b\right) =$$

6. Sean $a, b, c \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Exprese en términos de $f(a,c)$ y $f(b,c)$:

$$f(\lambda a + \mu b, c) = f(\lambda a, c) + f(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) = \underbrace{\qquad}_{?} f(a,c) + \mu \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

7. Sean $a, b, c, d \in V$, $\varkappa, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Exprese en términos de $f(a,d)$, $f(b,d)$, $f(c,d)$:

$$\begin{aligned} f(\varkappa a + \lambda b + \mu c, d) &= f(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) + f(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) + f(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) \\ &= \underbrace{\qquad}_{?} f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}) + \end{aligned}$$

8. Sean $a_1, \ldots, a_p, b \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{F}$. Exprese a través de $f(a_j, b)$:

$$f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j, b\right) =$$

Propiedad lineal respecto al segundo argumento

Suponemos que $f\colon V\times V\to\mathbb{F}$ es un funcional bilineal.

9. Sean $a, b_1, b_2, b_3 \in V$. Simplifique la expresión:

$$f(a, b_1 + b_2 + b_3) =$$

10. Sean $a, b_1, \ldots, b_q \in V$. Simplifique la expresión:

$$f\left(a,\ \sum_{j=1}^{q} b_k\right) =$$

11. Sean $a, b, c \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Exprese en términos de $f(a, b)$ y $f(a, c)$:

$$f(a, \lambda b + \mu c) = f(a, \lambda b) + f(\underbrace{\qquad\qquad}_{?}) = \underbrace{\qquad}_{?} f(a, b) + \mu \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

12. Sean $a, b, c, d \in V$, $\varkappa, \lambda, \mu \in \mathbb{F}$. Exprese en términos de $f(a, b)$, $f(a, c)$, $f(a, d)$:

$$f(a, \varkappa b + \lambda c + \mu d) = f(\qquad\qquad) + f(\qquad\qquad) + f(\qquad\qquad)$$

$$= \qquad f(\qquad\quad) +$$

13. Sean $a, b_1, \ldots, b_q \in V$, $\mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{F}$. Exprese a través de $f(a, b_k)$:

$$f\left(a,\ \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k\right) =$$

Propiedad bilineal y combinaciones lineales

14. Notación $\sum$ (repaso). Escriba la siguiente suma de sonriones de manera extensa. En otras palabras, escriba de manera explícita todos los 3 sumandos:

$$\sum_{j=1}^{3} ☺_{j} = \qquad\quad + ☺_{2} + \qquad\quad .$$

No es necesario saber qué significa un sonrión, solamente hay que sustituir j por 1, luego por 2 y por 3.

15. Sumas dobles (repaso). Sean $c_{j,k}$ algunos elementos de $\mathbb{F}$ ($j \in \{1,2,3\}$, $k \in \{1,2\}$). Escriba de manera explícita la siguiente suma:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} \overbrace{\sum_{k=1}^{2} c_{j,k}}^{\substack{\text{hace el papel}\\ \text{de sonrión}_j}} &= \sum_{k=1}^{2} c_{1,k} + \sum_{k=1}^{2} c_{2,k} + \sum_{k=1}^{2} c_{3,k} \\ &= \Big(\qquad\qquad\qquad \Big) + \big(c_{2,1} + c_{2,2}\big) + \Big(\qquad\qquad\qquad \Big).\end{aligned}$$

Suponemos que $f\colon V \times V \to \mathbb{F}$ es un funcional bilineal.

16. Sean $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 \in V$. Transformamos la expresión $f(a_1+a_2+a_3, b_1+b_2)$ aplicando la propiedad aditiva de f respecto al primer argumento y luego la propiedad aditiva de f respecto al segundo argumento:

$$\begin{aligned}&f(a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2) \\ &\qquad = f(a_1, b_1 + b_2) + f(\underbrace{\qquad}_{?}, b_1 + b_2) + f(\underbrace{\qquad}_{?}, b_1 + b_2) \\ &\qquad = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2) + \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} + \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?} \\ &\qquad = \sum_{k=1}^{2} f(a_1, b_k) + \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?} + \sum_{k=1}^{2} \underbrace{\qquad\qquad\quad}_{?} \\ &\qquad = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{2} f(\underbrace{\qquad}_{?}, \underbrace{\qquad}_{?}).\end{aligned}$$

17. Sean $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_q \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q \in \mathbb{F}$. Entonces

$$
\begin{aligned}
f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j a_j,\, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k\right) &\overset{\text{(i)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{p} f\left(\underbrace{\qquad\quad}_{?}, \sum_{k=1}^{q} \mu_k b_k\right) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} f(\underbrace{\qquad\quad}_{?}, \mu_k b_k) \\
&\overset{\text{(iii)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \underbrace{\qquad}_{?} f(a_j, \mu_k b_k) \\
&\overset{\text{(iv)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \lambda_j (\underbrace{\qquad}_{?} f(a_j, \underbrace{\qquad}_{?})) \\
&\overset{\text{(v)}}{=\!=} \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \underbrace{\qquad\qquad}_{?} f(a_j, b_k).
\end{aligned}
$$

Justifique todos los pasos.