Formas bilineales

Objetivos. Definir formas bilineales (= funcionales bilineales) y dar ejemplos. En el caso de dimensión finita estudiar su representación matricial. Deducir la fórmula del cambio de la matriz de una forma bilineal al cambiar la base del espacio.

Requisitos. Funcionales lineales.

1. Definición (forma bilineal = funcional bilineal). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Una función $f\colon V \times V \to \mathbb{F}$ se llama *forma bilineal* o *funcional bilineal* en V si es lineal con respecto a cada uno de sus argumentos:

- $f(\alpha u + \beta v, w) = \alpha f(u, w) + \beta f(v, w) \qquad \forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$
- $f(u, \alpha v + \beta w) = \alpha f(u, v) + \beta f(u, w) \qquad \forall u, v, w \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$

Denotemos por $\mathcal{BL}(V)$ al conjunto de todas las formas bilineales en V.

2. Ejemplo. El *producto interno canónico* $f\colon (\mathbb{R}^n)^2 \to \mathbb{R}$ definido mediante la siguiente fórmula es una forma bilineal en $\mathbb{R}^n$:

$$f(a, b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

3. Ejemplo. Sean $\varphi, \psi \in V^*$, esto es, sean φ y ψ funcionales lineales en V. Entonces la función $f\colon V^2 \to \mathbb{F}$ definida mediante

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$$

es una forma bilineal en V. Esta función se llama el *producto tensorial* de los funcionales φ y ψ y se denota por $\varphi \otimes \psi$.

4. Ejemplo principal. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz fija. Definamos la forma $f\colon (\mathbb{F}^n)^2 \to \mathbb{F}$ mediante la regla:

$$f(x, y) = x^\top A y.$$

Usando propiedades de la multiplicación de matrices y de la transposición de matrices es fácil demostrar que f es bilineal:

$$f(\lambda x + y, z) = \big(\lambda x + y\big)^\top A z = \big(\lambda x^\top + y^\top\big) A z = \lambda x^\top A z + y^\top A z = \lambda f(x, z) + f(y, z);$$

$$f(x, \lambda y + z) = x^\top A(\lambda y + z) = \lambda x^\top A y + x^\top A z = \lambda f(x, y) + f(x, z).$$

Vamos a mostrar que cualquier forma bilineal en un espacio vectorial de dimensión finita se puede representar de esta manera.

5. Ejemplo. Determine si el siguiente funcional $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ es bilineal o no:

$$f(x,y) = x_1y_2 + 3x_2y_1.$$

Solución. Podemos escribir f de la siguiente manera:

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Como el producto de matrices posee propiedades distributivas y homogéneas con respecto a ambos argumentos, f es bilineal. □

6. Ejemplo. Determine si el siguiente funcional $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ es bilineal o no:

$$f(x,y) = 3x_1x_2 - 4x_2y_2.$$

Solución. La expresión para f incluye el producto x_1x_2. Por eso podemos adivinar que f no es lineal. Para demostrarlo tenemos que construir un ejemplo. Sean

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$f(5x,y) = 75, \qquad 5f(x,y) = 15.$$ □

7. Ejercicios. Para cada uno de los siguientes funcionales $(\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ determine si es una forma bilineal o no:

- $f(x,y) = x_1y_2 + 5$.
- $f(x,y) = (x_1 - y_2)^2$.
- $f(x,y) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 - 4x_2y_1 + 7x_2y_2$.

8. Proposición (cómo actúan las formas bilineales aplicadas a combinaciones lineales de vectores). Sea $f \in \mathcal{BL}(V)$ y sean $a_1,\ldots,a_m \in V$, $b_1,\ldots,b_n \in V$, $\lambda_1,\ldots,\lambda_m,\mu_1,\ldots,\mu_n \in \mathbb{F}$. Entonces

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \lambda_i \mu_j f(a_i,b_j).$$

Demostración. Primero aplicamos la propiedad lineal de f respecto al primer argumento, luego la propiedad lineal de f respecto al segundo argumento:

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i f\left(a_i, \sum_{j=1}^n \mu_j b_j\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n \mu_j f(a_i,b_j).$$

Usando la propiedad homogénea de sumas, metemos λ_i dentro de la suma interior. □

Espacio vectorial de las formas bilineales

9. Operaciones lineales en el espacio de formas bilineales. Sea V un EV/$\mathbb{F}$. Las operaciones lineales en $\mathcal{BL}(V)$ se definen de manera natural, como operaciones lineales con funciones:

$$(f+g)(x,y) \coloneqq f(x,y)+g(x,y), \qquad (\alpha f)(x,y) \coloneqq \alpha f(x,y).$$

Es fácil ver que el conjunto $\mathcal{BL}(V)$ dotado con estas operaciones lineales es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

10. Base dual (repaso). Para resolver el siguiente ejercicio hay que recordar el concepto de la base dual. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. La *base dual* $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ a la base $\mathcal{B}$ consiste de los funcionales $\theta_1, \ldots, \theta_n$ definidos mediante la siguiente regla:

$$\theta_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_j b_j \right) = x_i.$$

Es fácil ver que los funcionales θ_i cumplen con la siguiente propiedad:

$$\theta_i(b_j) = \delta_{i,j} \qquad \forall i,j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Cualquier funcional $\varphi \in V^*$ se expande en una combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}^*$ de la siguiente manera:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(b_i)\theta_i.$$

11. Ejercicio (base del espacio de formas bilineales). Sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V, y sea $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ la base dual a $\mathcal{B}$. Notemos que $\mathcal{B}^*$ es una base de V^*. Definimos las formas bilineales $f_{i,j}$, donde $i,j \in \{1, \ldots, n\}$ de la siguiente manera:

$$f_{i,j}(u,v) = \theta_i(u)\theta_j(v).$$

Demuestre que estas formas bilineales $f_{i,j}$, donde $i,j \in \{1, \ldots, n\}$, forman una base del espacio $\mathcal{BL}(V)$. Como un corolario se obtiene que

$$\dim(\mathcal{BL}(V)) = n^2.$$

Formas bilineales simétricas y antisimétricas

12. Definición (formas bilineales simétricas y antisimétricas). Sea V un EV/$\mathbb{F}$. Una forma bilineal $f \in \mathcal{BL}(V)$ se llama:

- *simétrica*, si $f(u, v) = f(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in V$.
- *antisimétrica*, si $f(u, v) = -f(v, u)$ para cualesquiera $u, v \in V$.

A los conjuntos de todas las formas bilineales simétricas y antisimétricas los denotamos por $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$, respectivamente.

13. Ejemplo. La siguiente forma $f \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^2)$ es simétrica:

$$f(x, y) = 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5x_2y_1 - 7x_2y_2.$$

La siguiente forma $g \in \mathcal{BL}(\mathbb{R}^2)$ es antisimétrica:

$$g(x, y) = 4x_1y_2 - 4x_2y_1.$$

14. Ejemplo. La función $f\colon (\mathbb{R}^4)^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 - a_4b_4$$

es una forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^4$. Esta forma tiene una aplicación en la teoría de la relatividad especial, a saber, está relacionada con el *invervalo* entre dos eventos en el espacio-tiempo de Minkowski.

15. Ejemplo. Sea $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x_1y_2.$$

Este funcional bilineal no es simétrico ni antisimétrico (demuéstrelo).

16. Ejercicio. Demuestre que toda forma bilineal se representa de manera única como la suma de una forma bilineal simétrica y una forma bilineal antisimétrica.

17. Ejemplo. Sea $\varphi \in V^*$. Entonces la siguiente forma bilineal f es simétrica:

$$f(x, y) = \varphi(x)\varphi(y).$$

18. Ejemplo. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Entonces la siguiente forma bilineal f es simétrica:

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x).$$

19. Ejemplo. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Entonces la siguiente forma bilineal f es antisimétrica:

$$f(x, y) = \varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y).$$

20. Ejercicio. Demuestre que $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$ son subespacios del espacio vectorial $\mathcal{BL}(V)$. Además $\mathcal{BL}_s(V)$ es la suma directa de los subespacios $\mathcal{BL}_s(V)$ y $\mathcal{BL}_{as}(V)$.

21. Tarea adicional. Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita n y sea $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Denotemos por $\mathcal{B}^* = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ a la base dual. Construya una base de $\mathcal{BL}_s(V)$ y una base de $\mathcal{BL}_{as}(V)$. Calcule las dimensiones de estos espacios.