Espacio bidual

Objetivos. Definir el espacio bidual V^{**} de un espacio vectorial V y demostrar que en el caso de dimensión finita el espacio V^{**} se identifica de manera natural con V.

Requisitos. Espacio dual.

Definición (espacio bidual). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$. Su *espacio bidual* V^{**} se define como $(V^*)^*$. En otras palabras, V^{**} consiste en los funcionales lineales $V^* \to \mathbb{F}$, y las operaciones lineales en V^{**} están definidas punto a punto.

1. Lema. Sea V un EV/$\mathbb{F}$ y sea $a \in V$. Denotemos por Θ_a al mapeo $V^* \to \mathbb{F}$ definido mediante la siguiente regla:

$$\forall \varphi \in V^* \qquad \Theta_a(\varphi) \coloneqq \varphi(a).$$

Entonces $\Theta_a \in V^{**}$.

Demostración. Probemos que Θ_a es aditivo. Sean $\varphi, \psi \in V^*$. Entonces

$$\Theta_a(\varphi + \psi) = (\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a) = \Theta_a(\varphi) + \Theta_a(\psi).$$

Probemos que Θ_a es homogéneo. Sean $\varphi \in V^*$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Entonces

$$\Theta_a(\lambda\varphi) = (\lambda\varphi)(a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\Theta_a(\varphi).$$

En las igualdades anteriores usamos la definición de Θ_a y la definición de las operaciones lineales en V^*. $\square$

2. Ejemplo. En el espacio $\mathbb{R}^3$ al vector $a = \begin{bmatrix} 3, -1, 6 \end{bmatrix}^\top$ le corresponde el funcional $\Theta_a \in (\mathbb{R}^3)^{**}$ definido por

$$\Theta_a(\varphi) = \varphi(a) = \varphi \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo, si $\varphi(x) = -7x_1 + 4x_2 + 5x_3$, entonces

$$\Theta_a(\varphi) = \varphi(a) = -21 - 4 + 30 = 5.$$

3. Teorema (del isomorfismo canónico del espacio dual al espacio inicial). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita. Entonces la aplicación $\Theta\colon V \to V^{**}$, que manda un vector $v \in V$ al funcional $\Theta_v \in V^{**}$ definido por

$$\Theta_v(\varphi) = \varphi(v),$$

es un isomorfismo de V sobre V^{**}. Este isomorfismo Θ se llama *isomorfismo canónico* de V sobre V^{**}.

Plan de la demostración. 1. El lema garantiza que los valores de Θ realmente están en el espacio bidual V^{**}.

2. Demostrar que Θ es lineal.

3. Θ es inyectiva, esto es, $\ker \Theta = \{\mathbf{0}\}$. Usar el siguiente hecho: si $v \in V$ y $\varphi(v) = 0$ para todo $\varphi \in V^*$, entonces $v = \mathbf{0}$.

4. Demostrar que Θ es suprayectiva. Sabemos que $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$ y que Θ es inyectiva. Recordemos la fórmula que relaciona el rango con la nulidad:

$$\dim(\mathrm{im}(\Theta)) + \dim(\ker(\Theta)) = \dim(V).$$

De lo anterior sigue que $\dim(\ker(\Theta)) = 0$ y $\dim(V) = \dim(V^{**})$, así que

$$\dim(\mathrm{im}(\Theta)) = \dim(V^{**}).$$

Tomando en cuenta que $\mathrm{im}(\Theta)$ es un subespacio de V^{**} concluimos que $\mathrm{im}(\Theta) = V^{**}$, así que Θ es suprayectiva. $\square$