Construcción de una base del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas

Objetivos. Aprender a construir una base del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

Requisitos. Solución general de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, base, coordenadas.

1. Conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas (repaso). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ una matriz. Consideremos el *conjunto solución* del sistema de ecuaciones lineales homogéneas que corresponde a la matriz A:

$$S \coloneqq \big\{x \in \mathbb{F}^n : \quad Ax = \mathbf{0}_m\big\}.$$

Es fácil ver que S es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{F}^n$. Por eso S se llama a menudo el *espacio solución* de la ecuación $Ax = \mathbf{0}_m$. Vamos a aprender cómo construir una base de este espacio.

2. Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Demuestre que el conjunto

$$S \coloneqq \big\{x \in \mathbb{F}^n : \quad Ax = \mathbf{0}_m\big\}.$$

es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{F}^n$.

3. Ejemplo: base del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Construir una base de S, donde S el conjunto solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-7x_1 & + & 2x_2 & - & 7x_3 & - & 3x_4 & - & 5x_5 & = & 0; \\
2x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 0; \\
5x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & = & 0.
\end{array}\right.$$

En otras palabras, $S = \{x \in \mathbb{R}^5 : \ Ax = \mathbf{0}_3\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & -7 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Primero transformamos la matriz A en una matriz escalonada reducida o pseudoescalonada reducida aplicando operaciones elementales por renglones (estas operaciones no cambian el conjunto solución):

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -7 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 *= -1} \begin{bmatrix} -7 & 2 & -7 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & -4 & -1 & -4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += R_2]{R_1 += -2R_2}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -4 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += R_1]{R_2 += 4R_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ -14 & 1 & 0 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La última matriz es pseudoescalonada reducida y corresponde al siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ -14x_1 + x_2 - 5x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

Los pivotes están el las columnas 2 y 3, por eso tratamos las variables x_2 y x_3 como *variables dependientes* y las demás (x_1, x_4, x_5) como *variables libres*. Despejamos x_3 de la primera ecuación y x_2 de la segunda:

$$\begin{cases} x_2 = 14x_1 + 5x_4 - 8x_5; \\ x_3 = 3x_1 + x_4 - 3x_5. \end{cases}$$

Escribimos la solución general y la representamos como una combinación lineal de vectores constantes:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 14x_1 + 5x_4 - 8x_5 \\ 3x_1 + x_4 - 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

De (1) sigue que los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

generan al conjunto solución S. Además u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes. En efecto, supongamos que la combinación lineal de estos vectores escrita en el lado derecho de (1) es igual al vector cero. Entonces

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 14x_1 + 5x_4 - 8x_5 \\ 3x_1 + x_4 - 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tomando en cuenta las primera, la cuarta y la quinta componentes obtenemos que

$$x_1 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_5 = 0.$$

Resumen: los vectores u_1, u_2, u_3 definidos por (2) forman una base de S.

Podemos hacer una comprobación parcial. Probemos que u_1, u_2, u_3 en efecto pertenecen a S. Tenemos que multiplicar la matriz A por cada uno de los vectores u_1, u_2, u_3. Escribamos estos cálculos de manera más breve:

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & -7 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 14 & 5 & -8 \\ 3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7+28-21+0+0 & 0+10-7-3+0 & 0-16+21+0-5 \\ 2-14+12+0+0 & 0-5+4+1+0 & 0+8-12+0+4 \\ 5-14+9+0+0 & 0-5+3+2+0 & 0+8-9+0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark$$

Notemos que $\dim(S) = 3 =$ el número de variables libres en el sistema de ecuaciones $= 5 - \mathrm{r}(A)$. $\square$

4. Ejemplo: base del conjunto solución de una ecuación lineal homogénea. Construir una base de S, donde S el conjunto solución de la ecuación

$$3x_1 \;-\; 4x_2 \;-\; 2x_3 \;+\; 5x_4 \;=\; 0;$$

En otras palabras, $S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon Ax = \mathbf{0}_1\}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Una ecuación lineal homogénea es un caso especial de sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Así que podemos usar el mismo método que en el problema anterior.

La única diferencia es que en el caso $m = 1$ la eliminación de Gauss-Jordan es trivial y no es necesario usar la forma matricial. Podemos usar como pivote cualquiera de las 4 entradas no nulas de A. Para obtener denominadores más pequeños en la solución general, elejimos la entrada $(1, 3)$, esto es, tratamos la variable x_3 como variable dependiente y las variables x_1, x_2, x_4 como variables libres:

$$x_3 = \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{5}{2}x_4.$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \frac{3}{2}x_1 - 2x_2 + \frac{5}{2}x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3}.$$

De allí sigue que $S = \ell(u_1, u_2, u_3)$. Además u_1, u_2, u_3 son linealmente independientes.

Respuesta: u_1, u_2, u_3 es una base de S. Por consecuencia, $\dim(S) = 3$.

Comprobación (multiplicamos la matriz A por la matriz formada de las columnas u_1, u_2, u_3):

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & -2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & -4+4 & -5+5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

5. Proposición (de la dimensión del espacio solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas). Sea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ y sea S el conjunto solución del sistema $Ax = \mathbf{0}_m$:

$$S = \{x \in \mathbb{F}^n : \ Ax = \mathbf{0}_m\}.$$

Entonces

$$\dim(S) = n - \mathrm{r}(A).$$

Demostración. De la construcción escrita en ejemplos anteriores sigue que $\dim(S)$ es igual al número de variables libres en el sistema $Ax = \mathbf{0}_m$, y las variables libres son aquellas cuyas columnas no contienen pivotes (en forma pseudoescalonada reducida). Además $\mathrm{r}(A)$ es el número de pivotes en forma pseudoescalonada reducida. De allí sigue la fórmula requerida. $\square$