Construcción de una sublista básica de una lista de vectores

Objetivos. Dada una lista de vectores $a_1, \ldots, a_m$ en $\mathbb{Q}^n$ o $\mathcal{P}_n(\mathbb{Q})$ o $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Q})$, aprender a construir una sublista básica $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$. Notemos que esta sublista básica sirve como una base del subespacio generado por los vectores originales $a_1, \ldots, a_m$.

Requisitos. Operaciones elementales, algoritmo de eliminación de Gauss–Jordan, concepto de combinación lineal, concepto de vectores linealmente independientes.

1. Ejemplo. Encontrar una sublista básica de la siguiente lista de vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Expandir los demás vectores por los elementos de la sublista básica encontrada. Hacer la comprobación.

Solución. Consideremos la matriz del sistema de vectores dado. Transformemos esta matriz en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += -R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ -4 & 4 & -3 & -5 \\ 2 & -2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += -2R_1]{R_2 += 4R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 *= -\frac{1}{7}]{R_3 += R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En la última matriz las columnas 1 y 3 (que contienen los elementos pivotes) son linealmente independientes, y las columnas 2 y 4 son combinaciones lineales de las columnas 1 y 3:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las mismas dependencias son válidas para las columnas de la matriz inicial, esto es, para los vectores a_1, a_2, a_3, a_4.

Respuesta: $\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 2$, los vectores a_1 y a_3 forman una sublista básica, los vectores a_2 y a_4 son sus combinaciones lineales:

$$a_2 = -a_1, \qquad a_4 = 2a_1 - a_4.$$

Comprobación:

$$-a_1 = -\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = a_2, \qquad \checkmark$$

$$2a_1 - a_3 = 2\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-4 \\ -8+3 \\ 4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ -1 \end{bmatrix} = a_4. \qquad \checkmark \qquad \square$$

2. Ejemplo. Encuentre una sublista básica de la siguiente lista de vectores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Expanda los demás vectores por los elementos de la sublista básica encontrada. Haga la comprobación.

Demostración. Consideremos la matriz cuyas columnas son los vectores dados y la transformemos en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 += 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += 2R_2]{R_1 += -3R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 0 & -2 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 2R_3} \begin{bmatrix} 1 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La última matriz es pseudoescalonada reducida. En esta matriz las columnas con índices 1, 3, 4 son linealmente independientes, y las columna 2 es su combinación lineal. Las mismas relaciones tenemos entre las columnas de la matriz inicial, esto es, entre los vectores a_1, a_2, a_3, a_4.

Respuesta: $\mathrm{r}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 3$, (a_1, a_3, a_4) es una sublista básica de (a_1, a_2, a_3, a_4),

$$a_2 = 12a_1 + 7a_3 + 15a_4.$$

Comprobación:

$$12\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} + 15\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+21-30 \\ -24-35+60 \\ 0-14+15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad \checkmark \qquad \square$$

3. Ejemplo (encontrar una sublista básica de una lista de matrices). Hallar una sublista básica de la lista de matrices $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Escribir las demás matrices como combinaciones lineales de las matrices que forman esa sublista básica. Hacer las comprobaciones.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix},$$
$$A_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad A_5 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Las operaciones lineales con elementos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ se hacen por componentes, por eso podemos tratar las matrices originales como elementos de $\mathbb{R}^4$. Formamos una matriz 4×5 de las columnas correspondientes y la transformemos en una matriz pseudo-escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= 2R_2]{R_1 \mathrel{+}= -2R_2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -5 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 10 & 10 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{R_2 \mathrel{+}= -R_4 \\ R_3 \mathrel{+}= -2R_4}]{R_1 \mathrel{+}= R_4} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}}_{B}.$$

Obtuvimos una matriz pseudoescalonada reducida B. En la matriz B las columnas 1 y 3 son linealmente independientes, y las columnas 2, 4 y 5 son sus combinaciones lineales:

$$B_{*,2} = 2B_{*,1}, \qquad B_{*,4} = 5B_{*,1} - B_{*,3}, \qquad B_{*,5} = 5B_{*,1} - 3B_{*,3}.$$

Las mismas relaciones se tienen entre las matrices originales.

Respuesta: (A_1, A_3) es una sublista básica de la lista original $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$,

$$A_2 = 2A_1, \qquad A_4 = 5A_1 - A_3, \qquad A_5 = 5A_1 - 3A_3.$$

Comprobación:

$$2A_1 = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = A_2; \quad \checkmark$$
$$5A_1 - A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} = A_4; \quad \checkmark$$
$$5A_1 - 3A_3 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = A_5. \quad \checkmark$$

□

4. Ejemplo (construir una base del subespacio generado por un conjunto finito de polinomios). Construir una base $\mathcal{B}$ del subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{Q})$ generado por los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5. Representar cada uno de los polinomios f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 como una combinación lineal de los elementos de la base construida $\mathcal{B}$ y hacer las comprobaciones.

$$f_1 = 5 + 2x + 3x^2 + 2x^3, \qquad f_2 = 2 + 4x - 2x^2 + 3x^3, \qquad f_3 = 4 + x + 3x^2 + 3x^3,$$
$$f_4 = 4 + 2x + 2x^2 + x^3, \qquad f_5 = 5 + 4x + x^2 - 3x^3.$$

Solución. Para construir una base de $\ell(f_1, \ldots, f_5)$ encontremos una sublista básica de la lista $f_1, \ldots, f_5$. Formamos la matriz de los coeficientes de $f_1, \ldots, f_5$ y la transformamos en una matriz pseudoescalonada:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += -3R_2]{\substack{R_1 += -4R_2 \\ R_3 += -3R_2}} \begin{bmatrix} -3 & -14 & 0 & -4 & -11 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ -3 & -14 & 0 & -4 & -11 \\ -4 & -9 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 += -R_4}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -14 & 0 & -4 & -11 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 4 \\ -4 & -9 & 0 & -5 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 4R_3]{\substack{R_1 += 3R_3 \\ R_2 += -2R_3}} \begin{bmatrix} 0 & -29 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 14 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -29 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 *= -1}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 29 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 14 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & -5 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -29 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += R_1]{R_3 += -R_1} \begin{bmatrix} 0 & 29 & 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 14 & \boxed{1} & 0 & -4 \\ \boxed{1} & -34 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Respuesta: (f_1, f_3, f_4) es una base de $\ell(f_1, \ldots, f_5)$. En particular, f_2 y f_5 son combinaciones lineales de f_1, f_3, f_4:

$$f_2 = -34f_1 + 14f_3 + 29f_4, \qquad f_5 = 5f_1 - 4f_3 - f_4.$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} -34f_1 + 14f_3 + 29f_4 &= (-170 - 68x - 102x^2 - 68x^3) \\ &\quad + (56 + 14x + 42x^2 + 42x^3) \\ &\quad + (116 + 58x + 58x^2 + 29x^3) \\ &= 2 + 4x - 2x^2 + 3x^3 = f_2; \qquad \checkmark \\ 5f_1 - 4f_3 - f_4 &= (25 + 10x + 15x^2 + 10x^3) \\ &\quad + (-16 - 4x - 12x^2 - 12x^3) \\ &\quad + (-4 - 2x - 2x^2 - x^3) \\ &= 5 + 4x + x^2 - 3x^3 = f_5. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$\square$