Construcción de bases de subespacios (ejemplos)

Objetivos. Aprender a construir una base de un subespacio cuando las condiciones que determinan el subespacio se convierten en ecuaciones lineales homogéneas para coordenadas de vectores.

Requisitos. Construcción de una base del conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas, base, coordenadas, espacios $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

1. Ejemplo (construcción de una base de un subespacio de polinomios). Se considera el siguiente conjunto de polinomios:

$$S := \big\{ f \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \colon \; f(-3) = 0, \; f'(4) = 0 \big\}.$$

Demostrar que S es un espacio vectorial y construir una base de S.

Solución. 1. Se sabe que $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ es un espacio vectorial real. Demostremos que S es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Apliquemos el criterio de subespacio.

Denotemos por $\mathbf{0}_{\mathcal{P}}$ al polinomio cero (que tiene todos los coeficientes iguales a 0) y demostremos que $\mathbf{0}_{\mathcal{P}} \in S$. En efecto, $\mathbf{0}_{\mathcal{P}}' = \mathbf{0}_{\mathcal{P}}$ y

$$\mathbf{0}_{\mathcal{P}}(-3) = 0, \qquad \mathbf{0}_{\mathcal{P}}'(4) = \mathbf{0}_{\mathcal{P}}(4) = 0.$$

Probemos que el conjunto S es cerrado respecto a la adición. Sean $f, g \in S$. Por las propiedades de la derivada, $(f+g)' = f'+g'$. De la definición de la suma de dos polinomios sigue que $(f+g)(p) = f(p) + g(p)$ para cualquier punto $p \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (f+g)(-3) &= f(-3) + g(-3) = 0 + 0 = 0, \\ (f+g)'(4) &= (f'+g')(4) = f'(4) + g'(4) = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

así que $f + g \in S$.

Probemos que S es cerrado respecto a la multiplicación por escalares. Sean $f \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Por las propiedades de la derivada, $(\lambda f)' = \lambda f'$, y de la definición del producto de un polinomio por un escalar sigue que $(\lambda f)(p) = \lambda f(p)$ para todo punto $p \in \mathbb{R}$. Ahora es fácil ver que λf satisface las condiciones que definen S:

$$(\lambda f)(-3) = \lambda f(-3) = \lambda 0 = 0, \qquad (\lambda f)'(4) = (\lambda f')(4) = \lambda f'(4) = \lambda 0 = 0.$$

Acabamos de demostrar que S es un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ y por lo tanto es un espacio vectorial. Vamos a construir una base de S. El espacio $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ consiste en polinomos de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Escribamos las condiciones $f(-3) = 0$ y $f'(4) = 0$ que definen el subespacio S en términos de los coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} a_0 & - & 3a_1 & + & 9a_2 & - & 27a_3 & = & 0; \\ & & a_1 & + & 8a_2 & + & 36a_3 & = & 0. \end{array}\right. \tag{1}$$

Tenemos un sistema de ecuaciones lineales homogéneas con las incógnitas a_0, a_1, a_2, a_3. Aplicando operaciones elementales por renglones transformamos la matriz del sistema en una matriz escalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & 8 & 36 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 += 3R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 33 & 81 \\ 0 & 1 & 8 & 36 \end{bmatrix}.$$

Escribimos la solución general y construimos una base del conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} -33a_2 - 81a_3 \\ -8a_2 - 36a_3 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_2 \begin{bmatrix} -33 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -81 \\ -36 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores

$$u_1 = \begin{bmatrix} -33 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -81 \\ -36 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base del conjunto solución del sistema de ecuaciones (1). Los polinomios correspondientes forman una base de S:

$$f_1(x) = -33 - 8x + x^2, \qquad f_2(x) = -81 - 36x + x^3.$$

Vamos a probar que $f_1, f_2 \in S$. Para calcular $f_1(-3)$, $f_1'(4)$, $f_2(-3)$ y $f_2'(4)$, es cómodo utilizar la división sintética:

$$f_1(-3)\colon\quad \begin{array}{r|r|r|r} & 1 & -8 & -33 \\ \hline -3 & 1 & -11 & 0 \end{array}\ \checkmark \qquad\qquad f_1'(4)\colon\quad \begin{array}{r|r|r} & 2 & -8 \\ \hline 4 & 2 & 0 \end{array}\ \checkmark$$

$$f_2(-3)\colon\quad \begin{array}{r|r|r|r|r} & 1 & 0 & -36 & -81 \\ \hline -3 & 1 & -3 & -27 & 0 \end{array}\ \checkmark \qquad\qquad f_2'(4)\colon\quad \begin{array}{r|r|r|r} & 3 & 0 & -36 \\ \hline 4 & 3 & 12 & 0 \end{array}\ \checkmark \qquad \square$$

2. Ejemplo. Costruir una base del siguiente espacio de polinomios. Hacer la comprobación.

$$S = \big\{ f \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \quad f'(-4) + 5f(-4) = 0 \big\}.$$

Solución. La forma general de los elementos de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$. Para un polinomio f de esta forma,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x, \qquad f'(-4) = a_1 - 8a_2, \qquad f(-4) = a_0 - 4a_1 + 16a_2,$$

$$f'(-4) + 5f(-4) = (a_1 - 8a_2) + 5(a_0 - 4a_1 + 16a_2) = 5a_0 - 19a_1 + 72a_2.$$

La condición $f'(-4) + 5f(-4) = 0$ es equivalente a la siguiente ecuación lineal homogénea con las incógnitas a_0, a_1, a_2:

$$5a_0 - 19a_1 + 72a_2 = 0. \tag{2}$$

Despejamos a_0 tratando a_1 y a_2 como variables libres:

$$a_0 = \frac{19}{5} a_1 - \frac{72}{5} a_2.$$

Solución general del sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{19}{5} a_1 - \frac{72}{5} a_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{a_1}{5} \underbrace{\begin{bmatrix} 19 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + \frac{a_2}{5} \underbrace{\begin{bmatrix} -72 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{u_2}.$$

Los vectores u_1 y u_2 forman una base del conjunto solución del ecuación (2). Los polinomios correspondientes forman una base de S:

$$g_1(x) = 19 + 5x, \qquad g_2(x) = -72 + 5x^2.$$

Hagamos la comprobación que $g_1, g_2 \in S$:

$$\begin{aligned} g_1'(x) + 5g_1(x) &= 5 + 5(19 + 5x) = 100 + 25x, \\ g_1'(-4) + 5g_1(-4) &= 100 - 100 = 0; \quad \checkmark \\ g_2'(x) + 5g_2(x) &= 10x + 5(-72 + 5x^2) = -360 + 10x + 25x^2, \\ g_2'(-4) + 5g_2(-4) &= -360 - 40 + 400 = 0. \quad \checkmark \end{aligned}$$

□

3. Ejemplo (construcción de una base de un subespacio de matrices). Construir una base de S, donde S consiste en todas las matrices reales 2×2 que conmutan con la matriz
$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$
En otras palabras,
$$S \coloneqq \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \colon \; AX - XA = \mathbf{0}_{2\times 2} \right\}.$$

Solución. Cualquier matriz X del espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se puede escribir como
$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$
Calculamos la matriz $AX - XA$ que se llama el *conmutador* de las matrices A y X:
$$\begin{aligned} AX - XA &= \begin{bmatrix} -3x_1 + 4x_3 & -3x_2 + 4x_4 \\ 2x_1 + 5x_3 & 2x_2 + 5x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3x_1 + 2x_2 & 4x_1 + 5x_2 \\ -3x_3 + 2x_4 & 4x_3 + 5x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2x_2 + 4x_3 & -4x_1 - 8x_2 + 4x_4 \\ 2x_1 + 8x_3 - 2x_4 & 2x_2 - 4x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$
La condición $AX - XA = \mathbf{0}_{2\times 2}$ se convierte en el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas:
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} & - & 2x_2 & + & 4x_3 & & & = & 0; \\ -4x_1 & - & 8x_2 & & & + & 4x_4 & = & 0; \\ 2x_1 & & & + & 8x_3 & - & 2x_4 & = & 0; \\ & & 2x_2 & - & 4x_3 & & & = & 0. \end{array} \right. \tag{3}$$
Resolvamos este sistema:
$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_1 \mathrel{*}= -1/2 \\ R_2 \mathrel{*}= -1/4 \\ R_3 \mathrel{*}= 1/2 \\ R_4 \mathrel{*}= 1/2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\substack{R_2 \mathrel{+}= -2R_1 \\ R_4 \mathrel{+}= -R_1}}$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{R_3 \mathrel{+}= -R_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Solución general:
$$\begin{bmatrix} -4x_3 + x_4 \\ 2x_3 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_2}.$$

Los vectores $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ forman una base del conjunto solución del sistema (3). Las matrices correspondientes forman una base de S:

$$U_1 = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobemos que $U_1, U_2 \in S$. Notemos que U_2 es la matriz identidad y conmuta con cualquier matriz, en particular con A. Probemos que U_1 conmuta con A:

$$U_1 A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+4 & -16+10 \\ -3+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix};$$

$$A U_1 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12+4 & -6+0 \\ -8+5 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -6 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

4. Ejemplo. Costruir una base del espacio

$$S = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}): \quad \operatorname{tr}(XA) = 0\},$$

donde A es la matriz dada. Hacer la comprobación.

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Solución. La forma general de los elementos de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es

$$X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}.$$

Calculemos XA y $\operatorname{tr}(XA)$:

$$XA = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1 + x_2 & -3x_1 + 4x_2 \\ -4x_3 + x_4 & -3x_3 + 4x_4 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{tr}(XA) = -4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4.$$

Por lo tanto, $X \in S$ si, y sólo si,

$$-4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4. \tag{4}$$

Despejamos x_2 tratando x_1, x_3, x_4 como variables libres:

$$x_2 = 4x_1 + 3x_3 - 4x_4.$$

Solución general de la ecuación (4):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ 4x_1 + 3x_3 - 4x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_2} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_3}.$$

Base de S:

$$U_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad U_3 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobamos que $U_1, U_2, U_3 \in S$:

$$U_1A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{tr}(U_1A) = 0 + 0 = 0; \quad \checkmark$$

$$U_2A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{tr}(U_2A) = 3 - 3 = 0; \quad \checkmark$$

$$U_3A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \qquad \operatorname{tr}(U_3A) = -4 + 4 = 0. \quad \checkmark \quad \square$$