Ejemplos de construcción de bases en anuladores

Objetivos. Aprender a construir una base en el anulador de un subespacio generado por vectores dados.

Requisitos. Espacio dual, anulador.

1. Ejemplo. Construir una base del anulador del conjunto $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ y hacer la comprobación. Aquí los funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in (\mathbb{R}^4)^*$ están definidos mediante las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 4x_4,\\
\varphi_2(x) &= x_1 + 2x_3 - 2x_4,\\
\varphi_3(x) &= 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 6x_4.
\end{aligned}$$

Solución. Denotemos por S al anulador del conjunto Φ:

$$S \coloneqq \Phi^0 = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^0.$$

Por la definición del anulador de un conjunto de funcionales, S consiste en todos los vectores x del espacio $\mathbb{R}^4$ que se anulan por los funcionales dados $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon \ \varphi_1(x) = 0,\ \varphi_2(x) = 0,\ \varphi_3(x) = 0\}.$$

En otras palabras,

$$\begin{aligned}
x \in S \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (\varphi_1(x) = 0) \ \wedge\ (\varphi_2(x) = 0) \ \wedge\ (phi_3(x) = 0)\\
&\Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}
x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0;\\
x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 0;\\
2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 0.
\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Escribimos este sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas en forma matricial y lo resolvemos con el método de Gauss–Jordan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}
\xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= -2R_1]{R_2 \mathrel{+}= -R_1}
\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -4\\ 0 & -4 & -1 & 2\\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow{R_2 \mathrel{*}= -1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -4\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\xrightarrow[R_3 \mathrel{+}= R_2]{R_1 \mathrel{+}= -3R_2}
\begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución general:

$$x = \begin{bmatrix} 8x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ -4x_2 + 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{u_2}.$$

Los vectores u_1, u_2 forman una base de $S = \Phi^0$. Comprobamos que $u_1, u_2 \in \Phi^0$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varphi_1(u_1) & \varphi_1(u_2) \\ \varphi_2(u_1) & \varphi_2(u_2) \\ \varphi_3(u_1) & \varphi_3(u_2) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 0 \\ -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8+4-12+0 & -2+0+6-4 \\ 8+0-8+0 & -2+0+4-2 \\ 16+4-20+0 & -4+0+10-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square \end{aligned}$$

Los siguientes tres ejemplos forman una serie y muestran una de las propiedades más importantes de anuladores: $(\mathcal{A}^0)^0 = \ell(\mathcal{A})$.

2. Ejemplo. Construir una base Ψ del anulador de $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y hacer la comprobación. Describir el subespacio $\ell(\mathcal{A})$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Solución. Por definición, $\mathcal{A}^0$ consiste en todos los funcionales lineales φ tales que

$$\varphi(a_1) = 0, \quad \varphi(a_2) = 0, \quad \varphi(a_3) = 0.$$

Denotemos por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ a las coordenadas de φ respecto a la base dual a la base canónica de $\mathbb{R}^5$. En otras palabras, busquemos φ en forma

$$\varphi(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5.$$

Entonces las condiciones $\varphi(a_1) = 0$, $\varphi(a_2) = 0$, $\varphi(a_3) = 0$ se convierten en el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneas para las incógnitas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\alpha_3 - \alpha_4 + 2\alpha_5 = 0; \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 - 4\alpha_3 + \alpha_4 + 3\alpha_5 = 0; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 + 3\alpha_4 - \alpha_5 = 0. \end{cases}$$

Transformemos la matriz del sistema en una matriz pseudoescalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 += R_1]{R_2 += -R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 += -R_2]{R_1 += -2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escribimos el conjunto solución:

$$\begin{bmatrix} 4\alpha_3 + 5\alpha_4 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_2 - 2\alpha_4 \end{bmatrix} = \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_4 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Las columnas obtenidas son columnas de coordenadas de ciertos funcionales respecto a la base dual. Denotemos estos funcionales por ψ_1, ψ_2, ψ_3:

$$(\psi_1)_\Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (\psi_2)_\Gamma = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\psi_3)_\Gamma = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

También podemos escribir estos funcionales en forma explícita:

$$\psi_1(x) = x_2 + x_5, \qquad \psi_2(x) = 4x_1 + x_3, \qquad \psi_3(x) = 5x_1 + x_4 - 2x_5.$$

La lista $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ es una base de $\mathcal{A}^0$. Comprobemos que $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in \mathcal{A}^0$:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(a_1) & \psi_1(a_2) & \psi_1(a_3) \\ \psi_2(a_1) & \psi_2(a_2) & \psi_2(a_3) \\ \psi_3(a_1) & \psi_3(a_2) & \psi_3(a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0-2+0+0+2 & 0-3+0+0+3 & 0+1+0+0-1 \\ 4+0-4+0+0 & 4+0-4+0+0 & -4+0+4+0+0 \\ 5+0+0-1-4 & 5+0+0+1-6 & -5+0+0+3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark\square$$

3. Ejemplo (continuación del ejemplo anterior). Sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ la respuesta del ejemplo anterior:

$$\psi_1(x) = x_2 + x_5, \qquad \psi_2(x) = 4x_1 + x_3, \qquad \psi_3(x) = 5x_1 + x_4 - 2x_5.$$

Calcular una base $\mathcal{B}$ del anulador de Ψ y hacer la comprobación. En este ejercicio está prohibido utilizar los vectores a_1, a_2, a_3.

Solución. Como en el Ejemplo 1, tenemos que resolver un sistema de ecuaciones lineales homogéneas. Aquí la matriz ya es pseudoescalonada reducida:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

Por eso el conjunto solución se escribe muy fácilmente:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_5 \\ -4x_1 \\ -5x_1 + 2x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Los vectores b_1, b_2 forman una base $\mathcal{B}$ del subespacio Ψ^0. Comprobemos que $b_1, b_2 \in \Psi^0$:

$$\begin{bmatrix} \psi_1(b_1) & \psi_1(b_2) \\ \psi_2(b_1) & \psi_2(b_2) \\ \psi_3(b_1) & \psi_3(b_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -4 & 0 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+0+0+0+0 & 0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0 & 0+0+0+0+0 \\ 0+0+0+0+0 & 0+0+0+0+0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3,2}. \quad \checkmark \qquad \square$$

4. Ejemplo (continuación de los dos ejemplos anteriores). Sean $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ y $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ sistemas de vectores de los dos ejemplos anteriores:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \ a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \ b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Escribir cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$ y viceversa.

Solución. Juntamos las cinco columnas en una matriz. Para escribir cada vector de $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}$, transformamos la matriz en una matriz pseudoescalonada reducida eligiendo pivotes en las columnas correspondientes a b_1 y b_2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 += 5R_1]{R_3 += 4R_1} \ldots \xrightarrow[R_4 += -2R_5]{R_2 += R_5} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}.$$

De aquí se ve como expresar a_1, a_2, a_3 en términos de b_1 y b_2:

$$a_1 = b_1 + 2b_2, \qquad a_2 = b_1 + 3b_2, \qquad a_3 = -b_1 - b_2.$$

Comprobación:

$$b_1 + 2b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = a_1; \quad \checkmark$$

$$b_1 + 3b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = a_2; \quad \checkmark$$

$$-b_1 - b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = a_3. \quad \checkmark$$

Para expresar b_1, b_2 como combinaciones lineales de a_1, a_2, a_3, juntamos las cinco columnas en una matriz y la transformemos en una matriz pseudoescalonada reducida eligiendo pivotes en las columnas que corresponden a los vectores a_1, a_2, a_3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -4 & 4 & -4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_5 \mathrel{+}= -2R_1]{\substack{R_2 \mathrel{+}= 2R_1 \\ R_3 \mathrel{+}= 4R_1 \\ R_4 \mathrel{+}= R_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4 \mathrel{+}= -2R_5]{\substack{R_1 \mathrel{+}= -R_5 \\ R_2 \mathrel{+}= R_5}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí se ve que

$$b_1 = 3a_1 - 2a_2, \qquad b_2 = -a_1 + a_2.$$

También podemos observar que $a_3 = -2a_1 + a_2$, pero esto no nos importa.

Comprobación:

$$3a_1 - 2a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -12 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1; \quad \checkmark$$

$$-a_1 + a_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = b_2. \quad \checkmark$$

Acabamos de demostrar que

$$a_1, a_2, a_3 \in \ell(b_1, b_2), \qquad b_1, b_2 \in \ell(a_1, a_2, a_3).$$

Esto significa que $\ell(a_1, a_2, a_3) = \ell(b_1, b_2)$. □

Recordando que $\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ es una base de $(\mathcal{A}^0)^0$ comrendemos la moraleja de este cuento:

$$(\mathcal{A}^0)^0 = \ell(\mathcal{A}).$$