Bases de un espacio vectorial

Objetivos. Definir el concepto de una base de un espacio vectorial, mostrar ejemplos y establecer varios criterios de que un sistema de vectores es una base.

Requisitos. Conjunto generador, sistema de vectores linealmente independiente.

1. Nota sobre la definición de base. Hay varias definiciones equivalentes de base. Vamos a usar la definición que es más fácil para memorizar. Consideramos solamente bases *finitas ordenadas*.

2. Definición (lista genera al espacio). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una lista de vectores de V. Decimos que $\mathcal{B}$ *genera* a V si $\ell(\mathcal{B}) = V$, esto es, si para cualquier vector $v \in V$ existen algunos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j b_j.$$

En vez de decir "existen algunos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que ..." se puede decir "existe una lista de escalares $\alpha = \left[\alpha_j\right]_{j=1}^n \in \mathbb{F}^n$ tal que...".

3. Definición (base de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea $\mathcal{B} = (b_k)_{k=1}^n$ una lista de vectores de V. Se dice que $\mathcal{B}$ es una *base* de V si $\mathcal{B}$ genera al espacio V y es linealmente independiente.

4. Ejemplo. Los vectores e_1 y e_2, donde

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

forman una base de $\mathbb{R}^2$. Los vectores f_1 y f_2, donde

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

forman otra base de $\mathbb{R}^2$.

5. Proposición (sobre tamaños de bases de un espacio vectorial). Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_m)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ algunas bases de un espacio vectorial V. Entonces $m = n$.

Demostración. Como $\mathcal{A} \subseteq \ell(\mathcal{B})$ y $\mathcal{A}$ es linealmente independiente, por el teorema principal de dependiencia lineal se tiene que $m \leq n$. De manera similar, $n \leq m$. □

6. Definición (dimensión de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial. Si en V existe una base (finita), entonces se dice que V *es de dimensión finita*, y el tamaño de cualquier base de V se denomina la *dimensión* de V y se denota por $\dim(V)$.

7. Ejercicio (base canónica de $\mathbb{F}^n$). En el espacio $\mathbb{F}^n$ consideremos el siguiente sistema de vectores:

$$e_1 \coloneqq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad e_2 \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \ldots, \qquad e_n \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Formalmente, para todo $p \in \{1, \ldots, n\}$,

$$e_p \coloneqq \left[\delta_{k,j}\right]_{j=1}^{n}.$$

Demuestre que la lista de vectores $(e_1, e_2, \ldots, e_n) = (e_k)_{k=1}^n$ es una base de $\mathbb{F}^n$. De aquí sigue que $\dim(\mathbb{F}^n) = n$.

8. Ejemplo (base canónica del espacio de polinomios de grado acotado). El sistema de *monomios* $(e_k)_{k=0}^n$, donde $e_k(t) = t^k$, es una base del espacio $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$. Por lo tanto $\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{F})) = n$.

9. Ejemplo (el espacio de todos los polinomios no es de dimensión finita). Para todo $n \in \mathbb{N}$ la lista de monomios $(e_0, \ldots, e_n)$, donde $e_k(t) = t^k$, es linealmente independiente. Si $\mathcal{B}$ fuera alguna base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, entonces por el teorema principal de la dependencia lineal tendríamos que $n \leq |\mathcal{B}|$. Como n es arbitrario, obtenemos una contradicción.

10. Ejemplo (base de $V^2(O)$). Si $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V^2(O)$ no son colineales (equivalentemente, los puntos A, B, O no son colineales), entonces $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ es una base de $V^2(O)$. Por lo tanto $\dim(V^2(O)) = 2$.

11. Ejemplo (base de $V^3(O)$). En el espacio $V^3(O)$ tres vectores $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ forman una base, si no son complanares ($\Leftrightarrow$ los puntos O, A, B, C no son complanares). Por lo tanto $\dim(V^3(O)) = 3$.

12. Ejemplo (base canónica del espacio de matrices). Consideremos el espacio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$. Definamos las *matrices básicas* $E_{p,q} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ mediante la siguiente regla:

$$(E_{p,q})_{i,j} = \delta_{i,p}\delta_{j,q} = \begin{cases} 1, & i = p \quad \text{y} \quad j = q; \\ 0, & i \neq p \quad \text{o} \quad j \neq q. \end{cases}$$

Denotemos por $\mathcal{E}$ a la lista de matrices

$$(E_{1,1}, E_{1,2}, \ldots, E_{2,1}, \ldots, E_{m,n}).$$

Más formalmente,

$$\mathcal{E} \coloneqq \big(E_{p,q}\big)_{p,q=1}^{m,n}.$$

Entonces $\mathcal{E}$ es una base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$.