# Funciones antisimétricas

**Objetivos.** Definir funciones antisimétricas y estudiar sus propiedades básicas.

**Requisitos.** Permutaciones. Signo de una permutación.

## Funciones antisimétricas

**1. Funciones de $n$ argumentos.** Vamos a considerar *funciones de $n$ argumentos*, esto es, funciones de tipo $X^n \to \mathbb{F}$, donde $X$ es un conjunto arbitrario no vacío y $\mathbb{F}$ es un campo.

**2. Definición (función antisimétrica).** Una función $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ se llama *antisimétrica* si cambia su signo al intercambiar cualesquiera dos de sus argumentos, esto es, si para cualesquiera $i$, $j$ en $\{1,\ldots,n\}$ tales que $i<j$ y para cualesquiera $x_1,\ldots,x_n$ en $X$ se tiene la igualdad:

$$f(\ldots,\underbrace{x_j}_{\substack{i\text{-ésimo}\\ \text{argumento}}},\ldots,\underbrace{x_i}_{\substack{j\text{-ésimo}\\ \text{argumento}}},\ldots) = -f(\ldots,\underbrace{x_i}_{\substack{i\text{-ésimo}\\ \text{argumento}}},\ldots,\underbrace{x_j}_{\substack{j\text{-ésimo}\\ \text{argumento}}},\ldots).$$

**3. Caso particular $n=3$.** Para $n=3$ la definición anterior significa que para cualesquiera elementos $x_1,x_2,x_3$ del conjunto $X$ se cumplen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} f(x_2,x_1,x_3) &= -f(x_1,x_2,x_3),\\ f(x_3,x_2,x_1) &= -f(x_1,x_2,x_3),\\ f(x_1,x_3,x_2) &= -f(x_1,x_2,x_3). \end{aligned}$$

**4. Ejemplo.** Consideremos la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$f(x_1,x_2) = \operatorname{sen}(x_2 - x_1).$$

Recordemos que la función sen es impar:

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen}(t).$$

Usando este hecho es fácil demostrar que $f$ es antisimétrica:

$$f(x_2,x_1) = \operatorname{sen}(x_1 - x_2) = \operatorname{sen}\big(-(x_2 - x_1)\big) = -\operatorname{sen}(x_2 - x_1) = -f(x_1,x_2).$$

**5. Ejemplo.** La función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

es una función antisimétrica de tres argumentos reales.

**6. Ejercicio.** Componga una función antisimétrica de 4 argumentos reales.

## Permutaciones de los argumentos de una función

**7. Notación (permutación de argumentos).** Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de $n$ argumentos y $\varphi \in S_n$ una permutación del conjunto $\{1,\ldots,n\}$. Denotemos por $\varphi f$ a la función $X^n \to \mathbb{F}$ que se define mediante la siguiente fórmula:

$$(\varphi f)(x_1,\ldots,x_n) \coloneqq f(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)}) \qquad (x_1,\ldots,x_n \in X).$$

**8. Ejemplo.** Sean $f\colon X^4 \to \mathbb{F}$ una función de 4 argumentos y $\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Entonces

$$(\varphi f)(x_1,x_2,x_3,x_4) = f(x_3,x_1,x_4,x_2).$$

**9. Observación.** Ahora podemos escribir la definición de una función antisimétrica de manera más breve. Una función $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ es antisimétrica si $\tau_{i,j} f = -f$ para todos $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ con $i < j$.

**10. Ejemplo.** Vamos a ver qué pasa si a los argumentos de una función se aplica una permutación y luego otra. Sea $f$ una función de 4 argumentos y sean

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$(\varphi(\psi f))(x_1,x_2,x_3,x_4) = (\psi f)(x_1,x_3,x_2,x_4) = f(x_2,x_1,x_4,x_3).$$

Por otro lado,

$$\varphi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \psi\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**11. Proposición.** Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de $n$ argumentos y sean $\varphi,\psi \in S_n$. Entonces

$$\varphi(\psi f) = (\varphi\psi) f.$$

*Demostración.* De hecho,

$$(\varphi(\psi f))(x_1,\ldots,x_n) = (\psi f)(x_{\varphi(1)},\ldots,x_{\varphi(n)}) = f(x_{\varphi(\psi(1))},\ldots,x_{\varphi(\psi(n))}),$$

pero esto coincide con $((\varphi\circ\psi)f)(x_1,\ldots,x_n)$. $\square$

## Permutación de los argumentos de una función antisimétrica

**12. Teorema (permutación de los argumentos de una función antisimétrica).** Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función antisimétrica de $n$ argumentos y sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\varphi f = \operatorname{sgn}(\varphi) f.$$

*Demostración.* Descomponemos $\varphi$ en un producto de transposiciones:

$$\varphi = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k.$$

Entonces $\operatorname{sgn}(\varphi) = (-1)^k$ y

$$\varphi f = \alpha_1(\alpha_2(\ldots(\alpha_k f)\ldots)) = (-1)^k f = \operatorname{sgn}(\varphi) f. \qquad \square$$

**13. Tarea adicional (escribir la demostración de manera más formal, con inducción matemática).** En la demostración escrita arriba se usan puntos suspensivos. Para hacer la demostración más formal proceda por inducción sobre $\operatorname{d}(\varphi)$.

**14. Ejercicio (demostrar la afirmación recíproca a la afirmación del teorema).** Sea $f\colon X^n \to \mathbb{F}$ una función de $n$ argumentos tal que para cualquier permutación $\varphi \in S_n$ se cumple la igualdad $\varphi f = \operatorname{sgn}(\varphi) f$. Demuestre que $f$ es antisimétrica.

**15. Ejemplo.** Expresar $f(x_3, x_1, x_4, x_2)$ a través de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, si $f$ es una función antisimétrica de 4 argumentos.

*Primera solución (aplicar el teorema).* Sea

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{c}(1, 3, 4, 2).$$

Entonces $\operatorname{d}(\varphi) = 3$ y $\operatorname{sgn}(\varphi) = -1$. Por lo tanto,

$$f(x_3, x_1, x_4, x_2) = (\varphi f)(x_1, x_2, x_3, x_4) = \operatorname{sgn}(\varphi)\, f(x_1, x_2, x_3, x_4) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4). \qquad \square$$

*Segunda solución (transposiciones de los argumentos).*

$$f(x_3, x_1, x_4, x_2) = -f(x_1, x_3, x_4, x_2) = f(x_1, x_3, x_2, x_4) = -f(x_1, x_2, x_3, x_4). \qquad \square$$

**16. Ejercicio.** Exprese $f(x_3, x_5, x_2, x_4, x_1)$ a través de $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, si $f$ es una función antisimétrica de 5 argumentos.

**17. Ejercicio.** Exprese $f(x_3, x_4, x_2, x_1)$ a través de $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, si $f$ es una función antisimétrica de 4 argumentos.