Anuladores

Objetivos. Definir el concepto de anuladores y estudiar sus propiedades principales.

Requisitos. Espacio dual, espacio bidual, base dual.

1. Definición (anulador de un subconjunto de un espacio vectorial). Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea X un subconjunto de V. El *anulador de* X se define como el conjunto de todos los funcionales lineales $V \to \mathbb{F}$ que se anulan en todos elementos de X:

$$X^0 := \big\{\varphi \in V^* : \quad \forall x \in X \quad \varphi(x) = 0\big\}.$$

2. Ejercicio. Sea $X \subset V$. Demuestre que

$$X^0 = \big\{\varphi \in V^* : \quad X \subset \ker(\varphi)\big\}.$$

3. Ejercicio. Sea $X \subset V$. Demuestre que X^0 es un subespacio vectorial de V^*.

4. Ejercicio. Sean $X \subset Y \subset V$. Demuestre que

$$Y^0 \subset X^0.$$

5. Ejercicio. Sea $X = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset V$. Demuestre que

$$X^0 = \ell(X)^0.$$

6. Teorema (de la dimensión del anulador). Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo $\mathbb{F}$ y sea S un subespacio de V. Entonces

$$\dim(S) + \dim(S^0) = \dim(V).$$

Demostración. Sea $(b_1, \ldots, b_p)$ una base del subespacio S. La ampliamos a una base del espacio V:

$$(b_1, \ldots, b_p, b_{p+1}, \ldots, b_n).$$

Denotemos por $(\chi_1, \ldots, \chi_n)$ a la base dual. Demostremos que los funcionales

$$\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n$$

forman una base S^0.

1. Los funcionales $\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n$ son linealmente independientes por ser una parte de la base dual.

2. Mostremos que $\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n \in S^0$. Sea $i \in \{p+1, \ldots, n\}$. Si $v \in S$, entonces v se escribe en forma $v = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j b_j$ y por lo tanto

$$\chi_i(v) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \chi_i(b_j) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \delta_{i,j} = 0$$

pues $j \leq p < i$.

3. De la parte 2 sigue que $\ell(\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n) \subset S^0$.

4. Demostremos que $S^0 \subset \ell(\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n)$. Si $\psi \in S^0$, entonces

$$\psi(b_1) = \ldots = \varphi(b_p) = 0$$

y

$$\psi = \sum_{j=1}^{n} \psi(b_j)\varphi_j = \sum_{j=p+1}^{n} \psi(b_j)\chi_j \in \ell(\chi_{p+1}, \ldots, \chi_n). \qquad \square$$

7. Definición (anulador de un conjunto de V^*). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita y sea $F \subset V^*$. El *anulador* de F se define como el conjunto de todos los vectores en V que se anulan por todos funcionales de F:

$$F^0 := \big\{x \in V: \quad \forall \varphi \in F \quad \varphi(x) = 0\big\}.$$

8. Nota. Es posible definir F^0 como un subconjunto del espacio bidual $(V^*)^* = V^{**}$, pero ya sabemos que V^{**} se puede identificar con V mediante el isomorfismo canónico de V sobre V^{**}. Resulta ser más cómodo definir F^0 como un subconjunto de V.

9. Ejercicio. Sea $F \subset V^*$. Mostrar que

$$F^0 = \bigcap_{\varphi \in F} \ker \varphi.$$

10. Teorema (anulador del anulador de un subespacio). Sea V un EV/$\mathbb{F}$ de dimensión finita y sea $S < V$. Entonces $(S^0)^0 = S$.

Demostración. 1. Suponemos que $x \in S$ y tenemos para demostrar que $x \in F^0$, donde $F := S^0$. Por la definición de V^0 tenemos que $\varphi(x) = 0$ para todo $\varphi \in V^0 = F$. Por la definición de F^0, esto significa que $x \in F^0$.

2. Demostremos que si $x \notin S$, entonces $x \notin F^0$. Sea $x \in V \setminus S$. Por el teorema sobre la separación de un punto y un subespacio, existe un $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(x) = 1$ y $\varphi(y) = 0$ para todo $y \in S$. Pero lo último significa que $\varphi \in S^0$. Así pues existe un $\varphi \in F$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Esto implica que $x \notin F^0$. $\square$

11. Tarea adicional. Demuestre el teorema de otra manera usando la base dual.

12. Ejercicio. Sea X un subconjunto finito de E, donde E es de dimensión finita. Entonces $(X^0)^0 = \ell(X)$.

13. Ejemplo (construcción de una base del anulador). Dados $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^4$, describir el subespacio $S = \ell(a_1, a_2, a_3)$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y construir una base de S^0.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Solución. Sea $x = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3, x_4 \end{bmatrix}^\top$ un vector arbitrario de $\mathbb{R}^4$.
Tenemos la siguiente cadena de afirmaciones equivalentes: x pertenece a $S \iff$
$\iff$ existen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = x$
$\iff$ el siguiente sistema de ecuaciones es consistente:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 4 & -2 & x_1 \\ -3 & -4 & 5 & x_2 \\ 3 & 3 & -6 & x_3 \\ -2 & -1 & 5 & x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 2 & 4 & -2 & x_1 \\ -1 & 0 & 3 & x_1 + x_2 \\ 1 & -1 & -4 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 3 & 3 & x_1 + x_4 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -4 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & -1 & x_2 + x_3 \\ 0 & 6 & 6 & 3x_1 - 2x_3 \\ 0 & 3 & 3 & x_1 + x_4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -4 & -x_1 + x_3 \\ 0 & -1 & -1 & x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 \end{array}\right].$$

Ahora la matriz del sistema es escalonada. El sistema es consistente $\iff$ los términos independientes (es decir, los lados derechos) de las últimas dos ecuaciones son cero. Así obtenemos una *descripción del subespacio S a través de un sistema de ecuaciones lineales homogéneas*:

$$x \in S \qquad \iff \qquad \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Podemos escribir el sistema en forma $\psi_1(x) = 0 \ \wedge \ \psi_2(x) = 0$, donde

$$\psi_1(x) = 3x_1 + 6x_2 + 4x_3, \qquad \psi_2(x) = x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4.$$

Así que

$$S = \{\psi_1, \psi_2\}^0 = \ell(\psi_1, \psi_2)^0.$$

Aplicando el teorema sobre el anulador del anulador obtenemos que $S^0 = \ell(\psi_1, \psi_2)$. Para concluir que (ψ_1, ψ_2) es una base de S^0 sólo falta notar que $\dim(S^0) = 4 - \dim(S) = 2$.

Respuesta: una base de S^0 es (ψ_1, ψ_2), donde ψ_1 y ψ_2 tienen las siguientes coordenadas en la base dual a la base canónica de $\mathbb{R}^4$:

$$(\psi_1)_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (\psi_2)_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -3 & -4 & 5 \\ 3 & 3 & -6 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6-18+12+0 & 12-24+12+0 & -6+30-24+0 \\ 2-9+9-2 & 4-12+9-1 & -2+15-18+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

14. Ejemplo (construcción de una base del anulador). Dados $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$, describir el subespacio $S = \ell(a_1, a_2)$ con un sistema de ecuaciones lineales homogéneas y construir una base de S^0.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Solución. Un vector $x = \begin{bmatrix} x_1, x_2, x_3 \end{bmatrix}^\top$ pertenece a $S \iff$ es compatible el sistema

$$\left[\begin{array}{rr|c} 3 & 2 & x_1 \\ -2 & 1 & x_2 \\ 3 & -4 & x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} -2 & 1 & x_2 \\ 7 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ -5 & 0 & 4x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{rr|c} -2 & 1 & x_2 \\ 7 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ -35 & 0 & 28x_2 + 7x_3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|c} -2 & 1 & x_2 \\ 7 & 0 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 5x_1 + 18x_2 + 7x_3 \end{array}\right].$$

El sistema es compatible $\iff$ $5x_1 + 18x_2 + 7x_3 = 0$ $\iff$ $\psi_1(x) = 0$, donde

$$\psi_1(x) = 5x_1 + 18x_2 + 7x_3.$$

Así pues, $S = \{\psi_1\}^0 = \ell(\psi_1)^0$. Por el teorema sobre el anulador del anulador, $\ell(\psi_1) = S^0$. Además, $\dim(S^0) = 3 - \dim(S) = 1$. Por lo tanto, ψ_1 es una base de S^0.

Respuesta: una base de S^0 consiste en un elemento $\psi_1 = 5\gamma_1 + 18\gamma_2 + 7\gamma_3$, donde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ es la base dual a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Comprobación:

$$\begin{bmatrix} 5 & 18 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15-36+21 & 10+18-28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \checkmark \qquad \square$$

15. Ejercicio. Construya una base de S^0, donde S es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

16. Ejercicio. Construya una base de S^0, donde S es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$a_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$