Subgrupo alternante.
Biyecciones entre permutaciones pares e impares

Objetivos. Mostrar que el conjunto A_n de todas las permutaciones pares del conjunto $\{1, \ldots, n\}$ es un *subgrupo* de S_n. Construir biyecciones entre los conjuntos A_n y $S_n \setminus A_n$.

Requisitos. Signo de una permutación, signo del producto de permutaciones.

Signo de una permutación (repaso)

1. Definición de signo de una permutación (repaso). El *signo* o *signatura* de una permutación $\varphi \in S_n$ se define como $(-1)^{\mathrm{d}(\varphi)}$ y se denota por $\operatorname{sgn}(\varphi)$.

2. Signo del producto de transposiciones (repaso). Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in S_n$ son algunas transposiciones, entonces

$$\operatorname{sgn}(\alpha_1 \cdots \alpha_k) = (-1)^k.$$

3. El signo del producto de dos permutaciones (repaso). Sean $\varphi, \psi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = \operatorname{sgn}(\varphi) \operatorname{sgn}(\psi).$$

4. El signo de la permutación identidad (repaso). Fijemos n y denotemos por e a la permutación identidad del conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Entonces

$$\operatorname{sgn}(e) = 1.$$

5. El signo de la permutación inversa (repaso). Sea $\varphi \in S_n$. Entonces

$$\operatorname{sgn}(\varphi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\varphi).$$

Subgrupo alternante

6. Notación A_n. Denotemos por A_n al conjunto de todas las permutaciones pares del conjunto $\{1,\ldots,n\}$:

$$A_n \coloneqq \{\varphi \in S_n \colon\ \operatorname{sgn}(\varphi) = 1\}.$$

7. A_n es un subgrupo de S_n. Usando el teorema sobre el signo del producto demuestre que A_n es un *subgrupo* de S_n, es decir:

1. Si $\varphi, \psi \in A_n$, entonces $\varphi\psi \in A_n$.
2. Si $\varphi \in A_n$, entonces $\varphi^{-1} \in A_n$.
3. $e \in A_n$.

Para el conjunto A_n se usan los siguientes términos: *subgrupo alternante*, *subgrupo alternado*, *grupo alternante*, *grupo alternado*.

8. Proposición (construcción de una biyección del conjunto de las permutaciones pares sobre el conjunto de las permutaciones impares). Sea $n \ge 2$ y sea $\psi \in S_n$ una permutación impar fija. Definimos $\Lambda\colon A_n \to S_n \setminus A_n$ por medio de la siguiente regla:

$$\Lambda(\varphi) \coloneqq \varphi\psi \qquad \forall \varphi \in A_n,$$

Entonces la función Λ es biyectiva.

Demostración. 1. Probemos que la función Λ efectivamente toma valores en $S_n \setminus A_n$. Si $\varphi \in A_n$, entonces $\operatorname{sgn}(\varphi) = 1$ y $\operatorname{sgn}(\varphi\psi) = \operatorname{sgn}(\varphi)\operatorname{sgn}(\psi) = -1$.

2. Probemos que Λ es inyectiva. Si $\psi\varphi_1 = \psi\varphi_2$, entonces multiplicando por ψ^{-1} por la izquierda, obtenemos que $\varphi_1 = \varphi_2$.

3. Probemos que Λ es suprayectiva. Sea $\chi \in S_n \setminus A_n$, esto es, $\operatorname{sgn}(\chi) = -1$. Pongamos $\varphi = \chi\psi^{-1}$. Entonces $\varphi \in A_n$ y $\Lambda(\varphi) = \chi$. $\square$

9. Corolario (número de permutaciones pares). Sea $n \ge 2$. Entonces

$$|A_n| = \frac{|S_n|}{2} = \frac{n!}{2}.$$

Demostración. Apliquemos la proposición anterior con alguna permutación impar ψ, por ejemplo, con $\psi = \tau_{1,2}$, y obtenemos una biyección entre los conjuntos A_n y $S_n \setminus A_n$. Por lo tanto, estos dos conjuntos tienen el mismo número de elementos:

$$|A_n| = |S_n \setminus A_n|.$$

Por otro lado, estos dos conjuntos forman una partición de S_n, así que

$$|A_n| + |S_n \setminus A_n| = |S_n|.$$

De estas dos igualdades sigue que $|A_n| = \frac{|S_n|}{2}$. $\square$

10. Ejemplo (una biyección entre A_3 y $S_3 \setminus A_3$). El conjunto S_3 consiste de 6 permutaciones. Las escribamos en el orden lexicográfico y calculemos sus signos:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e, \qquad \mathrm{d}(\varphi_1) = 0, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_1) = 1;$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(2,3), \qquad \mathrm{d}(\varphi_2) = 1, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_2) = -1;$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(1,2), \qquad \mathrm{d}(\varphi_3) = 1, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_3) = -1;$$

$$\varphi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(1,2,3), \qquad \mathrm{d}(\varphi_4) = 2, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_4) = 1;$$

$$\varphi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(3,2,1), \qquad \mathrm{d}(\varphi_5) = 2, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_5) = 1;$$

$$\varphi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(3,1), \qquad \mathrm{d}(\varphi_6) = 1, \qquad \mathrm{sgn}(\varphi_6) = -1.$$

De aquí sigue que

$$A_3 = \{\varphi_1, \varphi_4, \varphi_5\}, \qquad S_3 \setminus A_3 = \{\varphi_2, \varphi_3, \varphi_6\}.$$

Fijemos una permutación impar, por ejemplo

$$\psi \coloneqq \varphi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathrm{c}_3(1,2),$$

y definimos la función Λ en el conjunto A_3 mediante la regla

$$\Lambda(\varphi) \coloneqq \varphi\psi.$$

Calculemos todos los productos $\varphi\psi$ con φ en A_3:

$$\Lambda(\varphi_1) = \varphi_1\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \varphi_3;$$

$$\Lambda(\varphi_4) = \varphi_4\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \varphi_6;$$

$$\Lambda(\varphi_5) = \varphi_5\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \varphi_2.$$

Vemos que Λ es una biyección de A_3 sobre $S_3 \setminus A_3$.