Álgebra II

Guía del Examen a Título de Suficiencia
Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional
Licenciatura en Física y Matemáticas

Esta guía está elaborada por el colectivo de los profesores que impartieron esta unidad de aprendizaje en el semestre agosto–diciembre de 2013: César Alberto Escobar Gracia, Salvador Quintín Flores García, Myriam Rosalía Maldonado Ramírez y Egor Maximenko.

Los temas principales son: matrices, sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y subespacios, dependencia lineal, bases y dimensión, transformaciones lineales, funcionales lineales, determinantes.

Por supuesto, las guías no pueden abarcar todos los tipos de problemas que se pueden incluir en el ETS, pero indican algunos temas importantes y muestran el nivel de complejidad.

Bibliografía recomendada

[1] Lipschutz, S., Lipson, M.: Schaum's outline of theory and problems of linear algebra. Third edition. McGraw–Hill, 2001.

[2] Friedberg, S. H., Insel, A. J., Spence, L. E.: Álgebra lineal. Cuarta edición. Pearson Education, 2003.

Literatura adicional:

[3] Axler, S.: Linear Algebra Done Right. Second Edition. Springer, 2004.

[4] Moore, J. T.: Elements of Linear Algebra and Matrix Theory. McGraw–Hill, 1968.

[5] Hoffman, K., Kunze, R.: Linear algebra. Second edition. Prentice–Hall, 1971.

Álgebra II. Examen a Título de Suficiencia. Variante α (guía).

Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
Licenciatura en Física y Matemáticas.

Nombre: ____ Calificación: __________

Problema 1. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, con las operaciones usuales, se consideran los siguientes conjuntos A y B. Dibuje cada uno de estos conjuntos en el plano euclideano y determine si éste es un subespacio del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$. Justifique la respuesta.

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = |x_2|\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 5x_2 = 0\}.$$

Problema 2. *2 puntos.*
Sean $u_1, \ldots, u_m$ algunos vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y sea A una matriz invertible.

I. Demuestre que si $u_1, \ldots, u_m$ son linealmente independientes, entonces $Au_1, \ldots, Au_m$ son linealmente independientes.

II. Demuestre que si $u_1, \ldots, u_m$ generan a $\mathbb{R}^n$, entonces $Au_1, \ldots, Au_m$ generan a $\mathbb{R}^n$.

Problema 3. *2 puntos.*
Construya una base del núcleo y una base de la imagen de la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Haga comprobaciones.

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4, 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, -x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4, 2x_2 + x_3 + x_4).$$

Problema 4. *2 puntos.*
Sea $T\colon V \to W$ un isomorfismo de espacios vectoriales, donde V es de dimensión finita. Demuestre que W también es de dimensión finita y $\dim(W) = \dim(V)$.

Problema 5. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, con las operaciones usuales, se considera la base ordenada $\mathcal{B}$ formada por los siguientes vectores:

$$b_1 = (1, 2, -1), \quad b_2 = (1, 1, -3), \quad b_3 = (2, 4, -1).$$

Construya tres funcionales lineales $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que formen la base dual a la base $\mathcal{B}$. Haga la comprobación, esto es, calcule $\varphi_j(b_k)$ para todos $j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Álgebra II. Examen a Título de Suficiencia. Variante β (guía).

Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

Licenciatura en Física y Matemáticas.

Nombre: ____ Calificación: __________

Problema 1. *2 puntos.*
Definimos la operación binaria $\oplus\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante la regla

$$(x_1, x_2) \oplus (y_1, y_2) = (x_1 + y_1 + 5, x_2 + y_2 + 7).$$

I. Muestre que existe un único elemento $u \in \mathbb{R}^2$ neutro respecto a la operación $\oplus$.

II. Para cada elemento a de $\mathbb{R}^2$ encuentre un $b \in \mathbb{R}^2$ tal que $a \oplus b = u$.

III. Demuestre que el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado con la operación $\oplus$ y con la multiplicación por escalares usual no es espacio vectorial real.

Problema 2. *2 puntos.*
Para cada valor del parámetro p encuentre una base del espacio

$$S(p) = \{x \in \mathbb{R}^3 : \quad A(p)x = 0\}, \qquad \text{donde} \qquad A(p) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & p \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 3. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ están dados tres vectores:

$$b_1 = (-1, 1, 1), \qquad b_2 = (3, -2, -3), \qquad b_3 = (2, -1, -1).$$

I. Compruebe que los vectores b_1, b_2, b_3 son linealmente independientes. Denotemos por $\mathcal{B}$ a la base ordenada formada por estos vectores y por $\mathcal{E}$ a la base canónica del espacio $\mathbb{R}^3$. Encuentre la matriz de transición (en otras palabras, la matriz de cambio de base) y su inversa. Haga la comprobación.

II. Explique por qué existe una única transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(b_1) = b_1$, $T(b_2) = b_2$, $T(b_3) = 0$. Calcule la matriz asociada a T respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$ y luego la matriz asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E}$.

Problema 4. *2 puntos.*
Sean A y B dos matrices reales de tamaño $n \times n$ tales que su producto AB es una matriz invertible. Demuestre que A y B son invertibles.

Problema 5. *2 puntos.*
Sea V un espacio vectorial real y sea $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ un funcional lineal no nulo. Demuestre que V es la suma directa del núcleo de V y de la imagen de φ.

Álgebra II. Examen a Título de Suficiencia. Variante γ (guía).

Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
Licenciatura en Física y Matemáticas.

Nombre: ____ Calificación: _________

Problema 1. *2 puntos.*
Para cada valor del parámetro a calcule la dimensión del subespacio de $\mathbb{R}^5$ formado por las soluciones del siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a & a & a \\ a & 2 & a & a & a \\ a & a & 3 & a & a \\ a & a & a & 4 & a \\ a & a & a & a & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 2. *2 puntos.*
Denotemos por S al conjunto de las matrices reales antisimétricas 3×3:

$$S = \{A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A^\top = -A\}.$$

Demuestre que S es un subespacio del espacio vectorial $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ y construya una base de S.

Problema 3. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ están dados dos vectores: $\alpha = (3, -2)$, $\beta = (1, 4)$. Demuestre que existe una única transformación lineal $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(\alpha) = \alpha, \qquad T(\beta) = 0.$$

Calcule la matriz asociada a esta transformación T respecto a la base ordenada $\mathcal{B}$ formada por los vectores α y β. Luego calcule la matriz asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ del espacio $\mathbb{R}^2$. Halle la imagen y el núcleo (kérnel, espacio nulo) de T. Explique el sentido geométrico de la transformación T.

Problema 4. *2 puntos.*
Sean V y W dos espacios vectoriales reales y sea $T \colon V \to W$ una transformación lineal.

a) Si T es inyectiva, demuestre que T transforma conjuntos *l.i.* en conjuntos *l.i.*

b) Si T es suprayectiva, demuestre que T transforma conjuntos generadores en conjuntos generadores.

Problema 5. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ consideremos dos funcionales, tr y φ, definidos mediante las siguientes reglas:

$$\operatorname{tr}(A) = a + d, \qquad \varphi(A) = b - c, \qquad \text{donde} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre las coordenadas de los funcionales tr y φ respecto a la base dual de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Construya una base del anulador del conjunto $\{\operatorname{tr}, \varphi\}$.

Álgebra II. Examen a Título de Suficiencia. Variante δ (guía).

Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
Licenciatura en Física y Matemáticas.

Nombre: ____ Calificación: __________

Problema 1. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3[x]$ consideremos el subespacio S generado por los polinomios dados $f_1(x), \ldots, f_5(x)$:

$$f_1(x) = 3 + 4x + x^2 + 3x^3, \qquad f_2(x) = 3 + 5x + 2x^2 + 2x^3, \qquad f_3(x) = 1 + x + x^3,$$
$$f_4(x) = 2 + 4x + 2x^2 - 4x^3, \qquad f_5(x) = -3 - x + 2x^2 - 3x^3.$$

Construya una base ordenada $\mathcal{B}$ de S. Calcule las coordenadas de cada uno de los polinomios $f_1(x), \ldots, f_5(x)$ respecto a $\mathcal{B}$. Haga las comprobaciones correpondientes.

Problema 2. *2 puntos.*
Sea $n \geq 2$. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, con las operaciones usuales, determine cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^n$. Justifique la respuesta.

$$A = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\}.$$

$$B = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 x_2 = 0\}.$$

Problema 3. *2 puntos.*
Consideremos la función $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida mediante la regla

$$T(X) = AX - XA, \qquad \text{donde} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

I. Demuestre que T es una transformación lineal.

II. Encuentre la matriz asociada a T respecto a la base canónica del espacio $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Problema 4. *2 puntos.*
Sea V un espacio vectorial real y sean S_1 y S_2 algunos subespacios de V tales que su unión $S_1 \cup S_2$ también es un subespacio de V. Demuestre que $S_1 \subseteq S_2$ o $S_2 \subseteq S_1$.

Problema 5. *2 puntos.*
Calcule el valor del siguiente determinante de orden n (la respuesta será una función de n y de los parámetros a y b):

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a & \ldots & a \\ a & a & b & b & \ldots & b \\ a & b & a & b & \ldots & b \\ a & b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

Álgebra II. Examen a Título de Suficiencia. Variante ε (guía).

Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.
Licenciatura en Física y Matemáticas.

Nombre: ____ Calificación: __________

Problema 1. *2 puntos.*

I. Sean S_1 y S_2 subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que su suma $S_1 + S_2$ e intersección $S_1 \cap S_2$ también son subespacios de V.

II. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ encuentre dos subespacios S_1 y S_2 tales que su unión $S_1 \cup S_2$ no sea subespacio de $\mathbb{R}^2$.

Problema 2. *2 puntos.*
En el espacio vectorial $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ consideremos dos subconjuntos:

$$S_1 = \big\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ A^\top = A\big\}, \qquad S_2 = \big\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})\colon\ A^\top = -A\big\}.$$

Demuestre que S_1 y S_2 son subespacios de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demuestre que el espacio $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ es la suma directa de S_1 y S_2.

Problema 3. *2 puntos.*
Consideremos la transformación lineal $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$,

$$T(X) = (X_{1,2} - X_{2,1}, X_{1,1} + X_{1,2} + X_{2,1} + X_{2,2}) \qquad (X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})).$$

I. Calcule la matriz asociada a T respecto a las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ y $\mathbb{R}^2$.

II. Calcule la matriz asociada a T respecto a la base ordenada $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^2$ y la base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{F}$ está formada por $f_1 = (0,1)$ y $f_2 = (1,-1)$, $\mathcal{B}$ consiste de las matrices B_1, B_2, B_3, B_4:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. *2 puntos.*
En cada uno de los siguientes dos incisos determine si los espacios V y W son isomorfos. Justifique la respuesta. En el caso de una respuesta positiva costruya un isomorfismo.

I. $V = \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}^3$. II. $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}_3[x]$.

Problema 5. *2 puntos.*
Denotemos por $\mathbb{R}_3[x]$ al espacio de los polinomios de grado ≤ 3. Definamos dos funciones $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}$ mediante las reglas

$$\varphi(P) = P(2), \qquad \psi(P) = P'(2) \qquad (P \in \mathbb{R}_3[x]).$$

I. Demuestre que φ y ψ son funcionales lineales.

II. Encuentre una base del anulador del conjunto $\{\varphi, \psi\}$ y haga comprobaciones.