Ejemplos de la construcción del operador adjunto

Objetivos. Estudiar ejemplos de la construcción del operador adjunto.

Requisitos. Transformación lineal, producto interno.

Definición formal del operador adjunto

1. Definición de operador adjunto. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $T, U \in \mathcal{L}(V)$. Se dice que U es un operador *adjunto* al operador T si

$$\forall v, w \in V \qquad \langle v, Tw \rangle = \langle Uv, w \rangle.$$

La siguiente proposición muestra que el operador adjunto es único (en el caso de su existencia), por eso se dice el operador adjunto.

2. Unicidad del operador adjunto. Sea V un espacio vectorial con producto interno y sean $T, U_1, U_2 \in \mathcal{L}(V)$ tales que

$$\forall v, w \in V \qquad \langle v, Tw \rangle = \langle U_1 v, w \rangle \qquad \wedge \qquad \langle v, Tw \rangle = \langle U_2 v, w \rangle.$$

Entonces $U_1 = U_2$.

Demostración. Para cualesquiera $v, w \in V$ tenemos que

$$\langle U_1 v, w \rangle = \langle U_2 v, w \rangle.$$

Como el producto interno es lineal respecto al primer argumento,

$$\langle U_1 v - U_2 v, w \rangle = \langle U_1 v, w \rangle - \langle U_2 v, w \rangle = 0.$$

En particular, poniendo $w = U_1 v - U_2 v$ obtenemos

$$\langle U_1 v - U_2 v, U_1 v - U_2 v \rangle = 0.$$

Como el producto interno es definido positivo, esto implica que $U_1 v - U_2 v = 0$. $\square$

3. Sobre la existencia del operador adjunto. Sea puede demostrar (lo haremos en otra clase) que en el caso de espacios con producto interno de dimensiones finitas (es decir, en el caso de espacios euclideanos o unitarios) el operador adjunto siempre existe. Más aún, en cursos de análisis se demuestra la existencia del operador adjunto en el caso de operadores lineales continuos que actúan en espacios de Hilbert (son espacios con producto interno completos respecto a la distancia inducida por este producto interno).

Ejemplos

4. Ejemplo (el operador adjunto al operador del desplazamiento en $\mathbb{C}^4$). Definimos el operador $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mediante la regla:

$$(Tx)_j := \begin{cases} x_{j+1}, & j \in \{1,2,3\}; \\ 0, & j = 4. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$Tx = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Encuentre T^*.

5. Ejemplo (el operador adjunto al operador del desplazamiento cíclico en $\mathbb{C}^4$). Haga la tarea del ejercicio anterior para el operador $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$(Tx)_j := \begin{cases} x_{j+1}, & j \in \{1,2,3\}; \\ x_1, & j = 4. \end{cases}$$

6. Ejemplo (el operador adjunto al operador de multiplicación en el espacio de las funciones continuas). Consideremos el espacio $C([\alpha,\beta]) = C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_\alpha^\beta \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Sea $a \in C([\alpha,\beta])$ una función fija. La transformación de *multiplicación por* a se define por la siguiente regla de correspondencia:

$$\forall f \in C([\alpha,\beta]) \quad \forall x \in [\alpha,\beta] \qquad (M_a f)(x) := a(x) f(x).$$

Es fácil ver que $M_a^* = M_{\bar{a}}$.

7. Ejercicio (la multiplicación izquierda por una matriz fija y su operador adjunto). En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con el producto interno canónico

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^* Y)$$

con cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ podemos asociar el operador

$$L_A\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

de la *multiplicación izquierda por* A:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad L_A X := AX.$$

Demuestre que L_A es un operador lineal y calcule su operador adjunto L_A^*.

8. Ejercicio (el adjunto al operador de la derivada en el espacio de las funciones suaves de soporte compacto). Denotemos por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ al espacio de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente derivables de soporte compacto. Se dice que una función f es de *soporte compacto* si existe un intervalo finito tal que f se anula en todas los puntos fuera de este intervalo. Definimos en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Como f y g son de soporte compacto, en realidad la integral siempre es sobre un intervalo finito (que depende de f y g).

Ahora consideremos en el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ el *operador derivada*:

$$D\colon C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad Df \coloneqq f'.$$

Calcule su operador adjunto D^*.

9. Ejercicio (el adjunto al operador integral). Consideremos el espacio de funciones continuas $C([a,b]) = C([a,b],\mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Sea $K \in C([a,b] \times [a,b])$. El *operador integral con el núcleo integral* K en el espacio $C([a,b])$ se define como

$$(Tf)(x) = \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt.$$

Demuestre que T^* es el operador integral con el núcleo integral K^*, donde

$$K^*(x,t) = \overline{K(t,x)} \qquad \forall x, t \in [a,b].$$

En otras palabras,

$$(T^*g)(y) = \int\limits_a^b \overline{K(u,y)}\, g(u)\, du.$$