Transformación adjunta a una transformación lineal

Objetivos. Estudiar la construcción y las propiedades básicas de la transformación lineal adjunta.

Requisitos. Transformación lineal, producto interno, representación de funcionales lineales en un espacio vectorial con producto interno.

En estos apuntos se supone que el producto interno es lineal con respecto al segundo argumento.

1. Proposición (criterio del vector cero en un espacio con producto interno, repaso). Sea V un espacio vectorial complejo con producto interno y sea $a \in V$. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes:

$$a = \mathbf{0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \perp a \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \perp V.$$

Demostración. Si $a = \mathbf{0}$, entonces para todo $b \in V$ tenemos que $\langle a, b \rangle = 0$, lo que significa que $a \perp V$.

Si $a \perp V$, entonces para todo $b \in V$ tenemos que $\langle a, b \rangle = 0$, en particular $a \perp a$.

Si $a \perp a$, entonces por la definición del producto interno $a = \mathbf{0}$. $\square$

2. Proposición (criterio para que dos transformaciones lineales en espacios con productos internos sean iguales). Sean V, W espacios vectoriales con producto interno y sean $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $T = U$.

(b) $\forall v \in V \quad \forall w \in W \quad \langle Tv, w \rangle_W = \langle Uv, w \rangle_W$.

(c) $\forall v \in V \quad \forall w \in W \quad \langle w, Tv \rangle_W = \langle w, Uv \rangle_W$.

Demostración. Demostremos que (b) implica (a). Aplicando propiedades linales escribimos la condición (b) de la siguiente manera:

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \qquad \langle (T - U)v, w \rangle_W = 0.$$

Esto significa que $(T-U)v \perp W$ y por lo tanto $(T-U)v = \mathbf{0}_W$. Como $v \in V$ es arbitrario, $T - U = \mathbf{0}$. $\square$

3. Definición (transformación adjunta a una transformación lineal en espacios con producto interno). Sean V, W espacios vectoriales (ambos reales o ambos complejos) con producto interno y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Una transformación lineal $S \in \mathcal{L}(W, V)$ se le llama *adjunta* a T si

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \qquad \langle w, Tv \rangle_W = \langle Sw, v \rangle_V. \tag{1}$$

4. Ejercicio. Demuestre que la condición (1) es equivalente a la siguiente:

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \qquad \langle Tv, w \rangle_W = \langle v, Sw \rangle_V.$$

5. Teorema (existencia y unicidad de la transformación adjunta). Sean V, W espacios vectoriales (ambos reales o ambos complejos) con producto interno, $\dim(V) < +\infty$ y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces existe una única transformación lineal $S \in \mathcal{L}(W, V)$ tal que

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \qquad \langle w, Tv \rangle_W = \langle Sw, v \rangle_V. \tag{2}$$

Esta transformación S se llama la *transformación adjunta a* T y se denota por T^*.

Demostración. Unicidad. Supongamos que S y S' ambas son transformaciones lineales adjuntas a T. Entonces

$$\forall v \in V \quad \forall w \in W \qquad \langle Sw, v \rangle_V = \langle w, Tv \rangle_W = \langle S'w, v \rangle_V,$$

y por el criterio de igualdad de transformaciones lineales en espacios con productos internos concluimos que $S = S'$.

Existencia. Consideramos sólo el caso compelejo (el caso real es similar). Para todo vector fijo $w \in W$ la función $\varphi_w \colon V \to \mathbb{C}$ definida mediante la regla

$$\varphi_w(v) = \langle w, Tv \rangle$$

es un funcional lineal en V, es decir, $\varphi_w \in V^*$. Por el de la representación de funcionales lineales en espacios unitarios (teorema de Riesz-Fréchet para el caso de dimensión finita) existe un único vector $u \in V$ tal que

$$\forall v \in V \qquad\qquad \varphi_w(v) = \langle u, v \rangle,$$

esto es,

$$\forall v \in V \qquad\qquad \langle w, Tv \rangle = \langle u, v \rangle.$$

El vector u depende de w. Lo denotamos por $S(w)$. Entonces S es una función de W en V y cumple con la propiedad (2).

Falta probar que S es lineal. Sean $b, c \in W$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Tenemos por demostrar que

$$S(\lambda b + \mu c) = \lambda S(b) + \mu S(c),$$

esto es,

$$S(\lambda b + \mu c) - \lambda S(b) - \mu S(c) = \mathbf{0}_V.$$

Por el criterio del vector cero en un espacio con producto interno, será suficiente demostrar que $S(\lambda b + \mu c) - \lambda S(b) - \mu S(c)$ es ortogonal a todo vector $a \in V$. Vamos a basarnos en la identidad (2) y en la propiedad lineal conjugada del producto interno con respecto al primer argumento.

$$\begin{aligned}\langle S(\lambda b + \mu c) - \lambda S(b) - \mu S(c), a\rangle &= \langle S(\lambda b + \mu c), a\rangle - \overline{\lambda}\langle S(b), a\rangle - \overline{\mu}\langle S(c), a\rangle \\ &= \langle \lambda b + \mu c, T(a)\rangle - \overline{\lambda}\langle b, T(a)\rangle - \overline{\mu}\langle c, T(a)\rangle \\ &= \langle \lambda b + \mu c - \lambda b - \mu c, T(a)\rangle \\ &= \langle \mathbf{0}, T(a)\rangle = 0.\end{aligned}$$

□

6. Nota. El teorema de Riesz-Fréchet de la representación de funcionales lineales es válido no sólo en espacios de dimensión finita, sino en todo *espacio de Hilbert* (este concepto generaliza espacios unitarios o euclidianos al caso de dimensión infinita; en pocas palabras, son los espacios con producto interno en los cuales toda sucesión de Cauchy converge). El teorema 5 que acabamos de demostrar también se puede generalizar al caso de espacios de Hilbert.

Operador adjunto

En el caso $V = W$ es común usar el término *operador lineal* en vez de *transformación lineal*. El caso particular $V = W$ es el más importante, por eso escribimos una versión del teorema 5 para este caso (por supuesto, ya no necesitamos demostrarlo).

7. Teorema (existencia y unicidad del operador adjunto a un operador lineal en un espacio unitario o euclidiano). Sea V un espacio unitario o euclidiano y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces existe un único operador lineal $S \in \mathcal{L}(V)$ tal que

$$\forall u, v \in V \, \langle u, Tv\rangle = \langle Su, v\rangle. \tag{3}$$

Este operador lineal S se llama el *operador adjunto a* T y se denota por T^*.

Ejemplos de operadores adjuntos

8. Ejemplo (el operador adjunto al operador del desplazamiento en $\mathbb{C}^4$). Definimos el operador $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mediante la regla:

$$(Tx)_j \coloneqq \begin{cases} x_{j+1}, & j \in \{1,2,3\}; \\ 0, & j = 4. \end{cases}$$

En otras palabras,

$$Tx = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Es fácil ver que $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Encuentre T^*.

9. Ejemplo (el operador adjunto al operador del desplazamiento cíclico en $\mathbb{C}^4$). Haga la tarea del ejercicio anterior para el operador $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$(Tx)_j \coloneqq \begin{cases} x_{j+1}, & j \in \{1,2,3\}; \\ x_1, & j = 4. \end{cases}$$

10. Ejemplo (el operador adjunto al operador de multiplicación en el espacio de las funciones continuas). Consideremos el espacio $C([\alpha,\beta]) = C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_\alpha^\beta \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Sea $a \in C([\alpha,\beta])$ una función fija. La transformación de *multiplicación por a* se define por la siguiente regla de correspondencia:

$$\forall f \in C([\alpha,\beta]) \quad \forall x \in [\alpha,\beta] \qquad (M_a f)(x) \coloneqq a(x) f(x).$$

Es fácil ver que $M_a^* = M_{\bar{a}}$.

11. Ejercicio (la multiplicación izquierda por una matriz fija y su operador adjunto). En el espacio $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con el producto interno canónico

$$\langle X, Y\rangle = \operatorname{tr}(X^* Y)$$

con cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ podemos asociar el operador

$$L_A\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

de la *multiplicación izquierda por A*:

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad L_A X \coloneqq AX.$$

Demuestre que L_A es un operador lineal y calcule su operador adjunto L_A^*.

12. Ejercicio (el adjunto al operador de la derivada en el espacio de las funciones suaves de soporte compacto). Denotemos por $C_0^\infty(\mathbb{R})$ al espacio de funciones $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ infinitamente derivables de soporte compacto. Se dice que una función f es de *soporte compacto* si existe un intervalo finito tal que f se anula en todas los puntos fuera de este intervalo. Definimos en $C_0^\infty(\mathbb{R})$ el siguiente producto interno:

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx.$$

Como f y g son de soporte compacto, en realidad la integral siempre es sobre un intervalo finito (que depende de f y g).

Ahora consideremos en el espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$ el *operador derivada*:

$$D\colon C_0^\infty(\mathbb{R}) \to C_0^\infty(\mathbb{R}), \qquad Df \coloneqq f'.$$

Calcule su operador adjunto D^*.

13. Ejercicio (el adjunto al operador integral). Consideremos el espacio de funciones continuas $C([a,b]) = C([a,b],\mathbb{C})$ con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int\limits_a^b \overline{f(x)} g(x)\, dx.$$

Sea $K \in C([a,b] \times [a,b])$. El *operador integral con el núcleo integral* K en el espacio $C([a,b])$ se define como

$$(Tf)(x) = \int\limits_a^b K(x,t) f(t)\, dt.$$

Demuestre que T^* es el operador integral con el núcleo integral K^*, donde

$$K^*(x,t) = \overline{K(t,x)} \qquad \forall x, t \in [a,b].$$

En otras palabras,

$$(T^* g)(y) = \int\limits_a^b \overline{K(u,y)}\, g(u)\, du.$$

Propiedades aritméticas de la transformación adjunta

Suponemos que V y W son espacios vectoriales con producto interno de dimensiones finitas, ambos complejos o ambos reales.

14. Adjunta de la adjunta. Sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$(T^*)^* = T.$$

15. Adjunta de la suma. Sean $T, U \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$(T + U)^* = T^* + U^*.$$

16. Adjunta del producto por escalar. Sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces

$$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*.$$

17. Adjunta del producto. Sean V, W, X espacios unitarios (o todos euclidianos) y sean $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $U \in \mathcal{L}(W, X)$. Entonces

$$(UT)^* = T^* U^*.$$

18. Adjunta de la identidad. Sea V un espacio unitario o euclidiano. Entonces

$$(I_V)^* = I_V.$$

19. Inversa de la transformación adjunta. Sean V, W espacios vectoriales con producto interno, $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$, $T \in \mathcal{L}(V, W)$ una transformación lineal invertible. Entonces T^* también es invertible, y

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*.$$

Idea de la demostración. Hay que demostrar que la transformación $(T^{-1})^*$ es inversa a T^*, esto es, que

$$(T^{-1})^* \, T^* = I \qquad \text{y} \qquad T^* \, (T^{-1})^* = I. \qquad \square$$

20. Corolario (invertibilidad de la transformación adjunta). Sean V, W espacios unitarios (o ambos euclidianos), $\dim(V) = \dim(W) < +\infty$, y sea $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Entonces

$$T \text{ es invertible} \quad \Longleftrightarrow \quad T^* \text{ es invertible.}$$

21. Proposición (espectro del operador adjunto). Sea V un espacio unitario o euclidiano y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces

$$\operatorname{sp}(T^*) = \overline{\operatorname{sp}(T)} = \big\{ z \in \mathbb{C} : \quad \overline{z} \in \operatorname{sp}(T) \big\}.$$

Demostración. Primero notemos que por las propiedades aritméticas de la adjunta,

$$(T^* - \lambda I)^* = (T^*)^* - (\lambda I)^* = T - \overline{\lambda} I.$$

Ahora aplicamos el criterio de invertibilidad de la transformación adjunta a la transformación $T^* - \lambda I$:

$$\begin{aligned} \lambda \in \operatorname{sp}(T^*) \quad &\Longleftrightarrow \quad (T^* - \lambda I) \text{ no es invertible} \\ &\Longleftrightarrow \quad T - \overline{\lambda} I \text{ no es invertible} \\ &\Longleftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \operatorname{sp}(T). \end{aligned} \qquad \square$$