Matriz adjunta
(matriz transpuesta conjugada)

Objetivos. Estudiar la definición de la matriz adjunta, ver la relación entre la transformación adjunta y la matriz adjunta.

Requisitos. Transformación lineal adjunta, matriz transpuesta, matriz de una transformación lineal, base ortonormal.

1. Definición (matriz adjunta). Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces la *matriz adjunta* de A se define por la siguiente regla:

$$A^* := \left[\,\overline{A_{k,j}}\,\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Esto es, $A^* \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C})$ y

$$\forall j \in \{1\ldots,n\} \quad \forall k \in \{1,\ldots,m\} \qquad (A^*)_{j,k} = \overline{A}_{k,j}.$$

En otras palabras, A^* es la matriz transpuesta y complejo conjugada de A.

2. Ejemplo. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1+3\,\mathrm{i} & 4+5\,\mathrm{i} \\ -\,\mathrm{i} & 0 & -3+\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^* = \begin{bmatrix} 5 & \mathrm{i} \\ -1-3\,\mathrm{i} & 0 \\ 4-5\,\mathrm{i} & -3-\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

3. Observación (la adjunta a una matriz real es la misma que la transpuesta). Si $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $A^* = A^\top$.

4. Coordenadas de un vector con respecto a una base ortonormal (repaso). Sean W un espacio vectorial unitario o euclidiano y $\mathcal{B} = (b_1,\ldots,b_m)$ una base ortonormal de W. Entonces para todo $v \in W$

$$v = \sum_{j=1}^{m} \langle b_j, v\rangle b_j, \qquad \text{esto es,} \qquad v_{\mathcal{B}} = \left[\langle b_j, v\rangle\right]_{j=1}^{m}.$$

5. Lema (cálculo de la matriz asociada a una transformación lineal en el caso si la base del contradominio es ortonormal). Sea $T \in \mathcal{L}(V)W$, donde V, W son espacios vectoriales de dimensiones finitas (ambos complejos o ambos reales), W con un producto interno. Sean $\mathcal{A} = (a_1, \ldots, a_n)$ una base de V y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m)$ una base ortonormal de W. Entonces

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[\langle b_j, Ta_k\rangle\right]_{j,k=1}^{m,n}.$$

Demostración. Denotemos por $t_{j,k}$ a la entrada de la matriz $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ con índices (j, k). Entonces por la definición de la matriz asociada a una transformación lineal,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad Ta_k = \sum_{j=1}^{m} t_{j,k} b_j.$$

Esto significa que $t_{j,k}$ es la j-ésima coordenada del vector Ta_k con respecto a la base $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es una base ortonormal,

$$t_{j,k} = \langle b_j, Ta_k\rangle. \qquad \square$$

6. Proposición (de la matriz asociada a la tranformación adjunta). Sean V y W espacios ambos unitarios o ambos euclidianos, $T \in \mathcal{L}(V)W$, $\mathcal{A}$ una base ortonormal de V y $\mathcal{B}$ una base ortonormal de W. Entonces

$$(T^*)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{B},\mathcal{A}})^*.$$

Esto es, la matriz asociada a la transformación adjunta con respecto a algunas bases ortonormales es la adjunta a la matriz asociada a la transformación original.

Demostración. Denotemos por $t_{p,q}$ y $u_{j,k}$ las entradas de las matrices $T_{\mathcal{B},\mathcal{A}}$ y $(T^*)_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$, respectivamente:

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{A}} = \left[t_{p,q}\right]_{p,q=1}^{m,n}, \qquad (T^*)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \left[u_{j,k}\right]_{j,k=1}^{n,m}.$$

Entonces por el lema

$$t_{p,q} = \langle b_p, Ta_q\rangle, \qquad u_{j,k} = \langle a_j, T^* b_k\rangle.$$

Pero por la propiedad hermitiana del producto interno y por la definición de la matriz adjunta obtenemos que

$$u_{j,k} = \langle a_j, T^* b_k\rangle = \overline{\langle T^* b_k, a_j\rangle} = \overline{\langle b_k, Ta_j\rangle} = \overline{t_{k,j}},$$

lo que significa que $(T^*)_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{B},\mathcal{A}})^*$. $\square$

Propiedades de la matriz adjunta

En la siguiente Proposición mostramos que:

1. La matriz adjunta de la suma de dos matrices (del mismo tamaño) es igual a la suma de las matrices adjuntas correspondientes.

2. La matriz adjunta del producto de un escalar por una matriz es igual al producto de este escalar por la matriz adjunta.

3. La matriz adjunta del producto de dos matrices (cuando los tamaños están relacionados tal que este producto tiene sentido) es igual al producto de las matrices adjuntas de las matrices originales, pero en el orden inverso.

4. Propiedad involutiva: la matriz adjunta de la matriz adjunta es igual a la matriz original.

7. Proposición (matriz adjunta y operaciones algebraicas).

1. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces
$$(A+B)^* = (A+B)^* = A^* + B^*.$$

2. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces
$$(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

3. Sean $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ y $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C})$. Entonces
$$(AB)^* = B^* A^*.$$

4. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$. Entonces
$$(A^*)^* = A.$$

Demostración basada en propiedades de la transposición de matrices. Recordamos que la operación la transposición de matrices tiene las siguientes propiedades:

$$(A+B)^\top = A^\top + B^\top, \qquad (\lambda A)^\top = \lambda A^\top, \qquad (AB)^\top = B^\top A^\top, \qquad \left(A^\top\right)^\top = A.$$

Por otro lado, de las propiedades de la conjugación de números complejos se siguen fácilmente las siguientes propiedades de la conjugación de matrices:

$$\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}, \qquad \overline{\lambda A} = \overline{\lambda}\,\overline{A}, \qquad \overline{AB} = \overline{A}\overline{B}, \qquad \overline{\overline{A}} = A.$$

Con esto es fácil demostrar propiedades escritas en la Proposición. Por ejemplo,

$$(AB)^* = \left(\overline{AB}\right)^\top = \left(\,\overline{A}\,\overline{B}\,\right)^\top = \left(\,\overline{B}\,\right)^\top \left(\,\overline{A}\,\right)^\top = B^* A^*. \qquad \square$$

Demostración directa. Demostremos de manera directa la fórmula para la adjunta del producto. Primero notamos que $(AB)^*$ y B^*A^* son del mismo tamaño:

$$\begin{tikzcd}
 & & A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C}) \arrow[r] \arrow[dl] & A^* \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{C}) \arrow[dr] & \\
(AB)^* \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{C}) & AB \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{C}) \arrow[l] & & & B^*A^* \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{C}) \\
 & & B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{C}) \arrow[ul] \arrow[r] & B^* \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{C}) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ahora probemos que para cualquier par de índices (r,s), donde $r \in \{1,\ldots,m\}$, $s \in \{1,\ldots,p\}$ la entrada (r,s) de matriz $(AB)^*$ coincide con la entrada (r,s) de la matriz B^*A^*:

$$\begin{aligned}
((AB)^*)_{r,s} &= \overline{(AB)_{s,r}} = \overline{\sum_{k=1}^{n} A_{s,k}B_{k,r}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{s,k}B_{k,r}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{s,k}}\,\overline{B_{k,r}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{B_{k,r}}\,\overline{A_{s,k}} = \sum_{k=1}^{n} (B^*)_{r,k}(A^*)_{k,s} = (B^*A^*)_{r,s}. \qquad \square
\end{aligned}$$

8. Ejercicio (invertibilidad de la matriz adjunta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz invertible. Entonces A^* también es invertible y

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

Indicación: denotar A^{-1} por B y demostrar que

$$A^*B^* = I_n, \qquad B^*A^* = I_n.$$

9. Ejercicio (determinante de la matriz adjunta). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces

$$\det(A^*) = \overline{\det(A)}.$$

10. Ejercicio (polinomio característico de la transformación adjunta). Sea V un espacio unitario o euclidiano de dimensión finita n y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Denotemos por $a_0,\ldots,a_n$ a los coeficientes del polinomio característico C_T:

$$\mathrm{C}_T(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0.$$

Calcule el polinomio característico de T^*.

11. Ejercicio (el espectro de la transformación adjunta). Sea V un espacio unitario o euclidiano y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Demuestre que

$$\mathrm{sp}(T^*) = \overline{\mathrm{sp}(T)}.$$

Sugerencia: puede aplicar el resultado del ejercicio anterior.