

# Permutaciones

## Tareas adicionales

Los problemas auxiliares de estas tareas adicionales no son muy difíciles y corresponden al nivel obligatorio de conocimientos. Los problemas principales de estas tareas adicionales no se incluyen en los exámenes.

## Cálculo de la inversa de una permutación en términos de su descomposición en ciclos disjuntos

### Problemas auxiliares

1. Escriba la siguiente permutación en forma explícita (en dos líneas), calcule su inversa y escriba el resultado en forma cíclica:

$$\varphi = c_8(5, 1, 7, 4, 2).$$

2. Escriba la siguiente permutación en forma explícita (en dos líneas), calcule su inversa y escriba el resultado en forma cíclica:

$$\varphi = c_9(1, 6) c_9(2, 7, 8) c_9(3) c_9(4, 9, 6).$$

### Problemas principales

3. **La inversa de una permutación cíclica.** Enuncie y demuestre una fórmula para  $\varphi^{-1}$ , donde  $\varphi$  es una permutación cíclica.

4. **Cálculo de la inversa de una permutación en términos de su descomposición en ciclos disjuntos.** Enuncie la fórmula general y explique la idea de demostración.

5. **El decremento de la permutación inversa.** Sea  $\varphi \in S_n$ . Demuestre que

$$d(\varphi^{-1}) = d(\varphi).$$

# Cualquier permutación de puede descomponer en un producto de transposiciones simples

## Problemas auxiliares

**Transposición simple.** Una transposición  $\tau_{p,q}$  se llama *simple* si  $|p - q| = 1$ .

6. Calcule el producto de las siguientes permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, 9\}$ :

$$\tau_{3,4}\tau_{4,7}\tau_{3,4}.$$

7. Calcule el producto de las siguientes permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, 7\}$ :

$$\tau_{2,3}\tau_{3,5}\tau_{2,3}.$$

8. Calcule el producto de las siguientes permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, 8\}$ :

$$\tau_{2,3}\tau_{3,4}\tau_{4,5}\tau_{5,6}\tau_{4,5}\tau_{3,4}\tau_{2,3}.$$

9. Recuerde cómo se puede factorizar una permutación en un producto de transposiciones.

## Problemas principales

10. **E.**scriba la transposición  $\tau_{3,6}$  del conjunto  $\{1, \dots, 9\}$  como un producto de transposiciones simples.

11. Sean  $2 \leq p < q \leq n$ . Calcule el producto de las siguiente permutaciones del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ :

$$\tau_{p-1,p}\tau_{p,q}\tau_{p-1,p}.$$

12. **Descomposición de una transposición en un producto de transposiciones simples.** Demuestre por inducción sobre  $k$  la siguiente afirmación: para cualquier  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$  y cualquier  $q \in \{2, \dots, n\}$ , la transposición  $\tau_{q-k,q}$  se puede escribir como un producto de  $k$  transposiciones simples.

13. Muestre con un ejemplo cómo factorizar una permutación en un producto de transposiciones simples.

# Funciones simétricas

## Problemas auxiliares

14. Recuerde cómo factorizar una permutación en un producto de transposiciones. Puede explicarlo con un ejemplo.

15. Sea  $f: X^n \rightarrow \mathbb{F}$  una función de  $n$  argumentos y sea  $\varphi$  una permutación del conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Recuerde cómo se define la función  $\varphi f$ .

16. Sea  $f: X^n \rightarrow \mathbb{F}$  una función de  $n$  argumentos y sean  $\varphi, \psi \in S_n$ . Recuerde la fórmula para  $\varphi(\psi f)$ .

17. Sea  $f: X^n \rightarrow \mathbb{F}$  una función tal que para cualquier  $\varphi$  en  $S_n$  se cumple la igualdad  $\varphi f = f$ . Demuestre que  $f$  es simétrica.

## Problemas principales

18. Sea  $f: X^n \rightarrow \mathbb{F}$  una función simétrica y sea  $\varphi$  en  $S_n$ . Demuestre que  $\varphi f = f$ .

19. Sean  $f, g, h: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $g$  es simétrica,  $h$  es antisimétrica y  $f = g + h$ . Sean  $a, b \in X$ . Expresé  $g(a, b)$  y  $h(a, b)$  en términos de  $f, a$  y  $b$ .

20. Sea  $f: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Construya una función simétrica  $g: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y una función antisimétrica  $h: X^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f = g + h$ .