Determinantes

problemas teóricos adicionales

Los problemas auxiliares de estas tareas adicionales no son muy difíciles y corresponden al nivel obligatorio de conocimientos. Los problemas principales de estas tareas adicionales son más complicados y no se incluyen en los exámenes.

Deducir la propiedad aditiva de otras propiedades

En esta tarea se supone que $f\colon (\mathbb{R}^2)^2 \to \mathbb{R}$ es una función que cumple con las siguientes propiedades:

1. $f(a, a) = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^2$.
2. $f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. $f(a, b + \lambda a) = 0$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $f(a, \lambda b) = \lambda f(a, b)$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. $f(a + \lambda b, b) = 0$ para todos $a, b \in \mathbb{R}^2$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. $f(e_1, e_2) = 1$.

Hay que demostrar que $f(a, b) = \mathrm{Det}(a, b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^2$.

Problemas auxiliares

1. Demuestre que $f(a, \mathbf{0}_2) = 0$ para cualquier $a \in \mathbb{R}^2$ y $f(\mathbf{0}_2, b) = 0$ para cualquier $b \in \mathbb{R}^2$.

2. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2$, $a \neq \mathbf{0}_2$, $b = \lambda a$ con algún $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestre que

$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c).$$

3. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ tales que a y b son linealmente independientes. Muestre que c es una combinación lineal de a y b y pruebe la fórmula

$$f(a, b + c) = f(a, b) + f(a, c).$$

Problemas principales

4. Demostrar que $f(a, b) = \mathrm{Det}(a, b)$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^2$.

5. Generalizar el problema y la solución al caso de funciones $(\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$.

Cálculo por inducción de algunos determinantes

Problemas auxiliares

6. Calcule uno por uno los siguientes determinantes:

$$D_1(a) = \det\begin{bmatrix} a \end{bmatrix}, \quad D_2(a) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_3(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad D_4(a) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Usando propiedades de determinantes exprese $D_4(a)$ en términos de $D_3(b)$, donde b depende de a.

8. Ejercicio lógico sobre variables libres y ligadas. Para cada una de las siguientes dos afirmaciones determine si esta es correcta o falsa o no está determinada:

A: $\quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad x + y = 5.$

B: $\quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists y \in \mathbb{Z} \quad x + y = 5.$

C: $\quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad x + y = 5.$

Problemas principales

9. Deducción de una fórmula recursiva. Usando propiedades de determinantes exprese $D_n(a)$ en términos de $D_{n-1}(\ldots)$, donde "$\ldots$" es una expresión dependiente de a.

10. Escriba bien la afirmación que va a demostrar por inducción:

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

11. Escriba bien la demostración por inducción.

Determinantes de matrices antitriangulares superiores

Problemas auxiliares

12. Calcule $\operatorname{sgn}(\psi_n)$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, donde

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Indicación: no es muy fácil adivinar la fórmula correcta para $\operatorname{sgn}(\psi_n)$. En este ejercicio no se trata de adivinar una fórmula, sino calcular bien $\operatorname{sgn}(\psi_n)$ para todos estos valores particulares de n.

13. Escriba la definición de ψ_5 con una fórmula:

$$\forall k \in \{1, \ldots, 5\} \qquad \psi_5(k) \coloneqq \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

Escriba la definición general de ψ_n:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad \psi_n(k) \coloneqq \underbrace{\qquad\qquad}_{?}.$$

14. Signo de $\boldsymbol{\psi_n}$ (cuatro casos). Cada número $n \in \{1, 2, \ldots\}$ se puede escribir como $n = 4q + r$ con $q \in \mathbb{Z}$ y $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Calcule $\operatorname{sgn}(\psi_n)$ para el caso $r = 0$, luego para $r = 1$, $r = 2$ y $r = 3$.

15. Recuerde el lema (la fórmula) sobre el determinante de una matriz con un renglón casi nulo y aplíquelo al siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ A_{2,1} & B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} \\ A_{3,1} & B_{3,1} & B_{3,2} & B_{3,3} \\ A_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

16. Calcule los siguientes determinantes:

$$\det\bigl[A_{1,1}\bigr], \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & 0 \\ A_{3,1} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & 0 & 0 \\ A_{4,1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & A_{1,4} & A_{1,5} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & A_{2,4} & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & 0 & 0 \\ A_{4,1} & A_{4,2} & 0 & 0 & 0 \\ A_{5,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Problemas principales

17. Escriba la permutación ψ_4 como un producto de transposiciones simples, es decir, transposiciones de la forma $\tau_{i,i+1}$. Indicación: primero mueva el elemento que tiene valor 4 a su lugar adecuado, se necesitan 3 transposiciones simples para hacerlo.

18. Explique cómo factorizar ψ_n en un producto de transposiciones simples y calcule el número de elementos en este producto.

19. Deduzca una fórmula para $\operatorname{sgn}(\psi_n)$.

20. ¿Cuándo $A_{i,j}$ está en la antidiagonal de la matriz A?. En otras palabras, ¿qué condición deben satisfacen los índices i y j para que $A_{i,j}$ esté en la antidiagonal de la matriz A?.

21. Escriba de manera formal la definición de matriz antitriangular superior.

22. Determinante de una matriz antitriangular superior. Deduzca una fórmula general para el determinante de matrices antitriangulares superiores.

Matrices adjuntas clásicas de matrices triangulares superiores

Problemas auxiliares

23. Sea $A \in \mathfrak{ut}_2(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{bmatrix}.$$

¿Cuándo es invertible la matriz A?. En el caso si A es invertible calcule $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}.

24. Sea $A \in \mathfrak{ut}_3(\mathbb{F})$:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & A_{3,3} \end{bmatrix}.$$

¿Cuándo es invertible la matriz A?. En el caso si A es invertible calcule $\operatorname{adj}(A)$ y A^{-1}.

25. Sea $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$. Recuerde la fórmula para $\det(A)$.

26. Sea $A \in \mathfrak{ut}_5(\mathbb{F})$. Calcule $\widehat{A}_{2,2}$, $\widehat{A}_{2,4}$ y $\widehat{A}_{3,4}$.

Problemas principales

27. Sean $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$ y $p \in \{1, \ldots, n\}$. Calcule $\widehat{A}_{p,q}$.

28. Sean $A \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{F})$, $p, q \in \{1, \ldots, n\}$, $p < q$. Demuestre que $\widehat{A}_{p,q} = 0$.

29. Sea $A \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{F})$, es decir, sea A una matriz triangular superior con entradas diagonales no nulas. Demuestre que $A^{-1} \in \mathrm{UT}_n(\mathbb{F})$ y calcule las entradas diagonales de A^{-1}.

Derivada de la función determinante

Problemas auxiliares

30. Sean $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(t) \coloneqq \det(A + tB).$$

1. Escriba $f(t)$ de manera explícita usando la definición del determinante 2×2.
2. Escriba $f(t)$ como un polinomio de t. Exprese los coeficientes de este polinomio como determinantes de ciertas matrices.
3. Calcule $f'(t)$ y $f'(0)$.

31. Supongamos que para cada par de índices (j, k), donde $j, k \in \{1, 2\}$, está dada una función derivable $F_{j,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(t) \coloneqq \begin{vmatrix} F_{1,1}(t) & F_{1,2}(t) \\ F_{2,1}(t) & F_{2,2}(t) \end{vmatrix}.$$

Calcule $f'(t)$. Exprese la respuesta en términos de ciertos determinantes.

Problemas principales

32. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(t) \coloneqq \det(I_n + tB),$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$. Muestre que la función f es derivable y calcule su derivada.

33. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$f(t) \coloneqq \det(A + tB).$$

Muestre que la función f es derivable y calcule su derivada.

34. Supongamos que para cada par de índices (j, k), donde $j, k \in \{1, \dots, n\}$, está dada una función derivable $F_{j,k}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Definimos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la siguiente regla:

$$f(t) \coloneqq \det\Big[\, F_{j,k}(t) \,\Big]_{j,k=1}^{n}.$$

En otras palabras, $f(t)$ el determinante de la matriz cuya (j, k)-ésima entrada es $F_{j,k}(t)$. Muestre que la función f es derivable y calcule $f'(t)$.