# Propiedades del valor absoluto de números enteros (ejercicios)

**1. Ejemplos.**

$$|-6| = 6, \qquad |8| = 8, \qquad |23| = 23, \qquad |0| = 0, \qquad |-5| = 5.$$

Rellene los espacios:

$$|-4| = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad |15| = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad |-120| = \underbrace{\qquad\quad}_{?}, \qquad |0| = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

**2. Definición formal.** El *valor absoluto* (o *módulo*) de un número entero $a$ se define de la siguiente manera:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{si } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

**3. Observación.** Si $a = 0$, entonces $a = -a$ y $|a| = -a$. Por eso la definición anterior se puede escribir también de otra manera:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0; \\ -a, & \text{si } a \leqslant 0. \end{cases}$$

**4. Un ejemplo más.** Sea $a = -7$. Calcule $-a$ y $|-a|$:

$$-a = \underbrace{\qquad}_{?}, \qquad |-a| = \underbrace{\qquad}_{?}.$$

Determine si $|-a|$ en este ejemplo coincide con $a$ o con $-a$:

$$\text{en este ejemplo} \quad |-a| = \underbrace{\qquad\qquad}_{¿a \text{ ó } -a?}.$$

Este ejemplo muestra que la receta informal "quitar el signo" puede ser confusa.

**5. Desigualdades inestrictas.** De las siguientes afirmaciones indique todas las correctas:

- ☐ Si $a > 7$, entonces tambiés podemos escribir $a \geqslant 7$.
- ☐ Si $a > 7$, entonces no podemos escribir $a \geqslant 7$.
- ☐ Si $a = 7$, entonces es cierto que $a \geqslant 7$.
- ☐ Si $a = 7$, entonces no es cierto que $a \geqslant 7$.
- ☐ Si $a \geqslant 7$, entonces $a > 7$.
- ☐ Si $a \geqslant 7$, entonces $\quad a > 7 \quad \text{o} \quad a = 7$.

**6. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$|a| \geqslant 0. \tag{1}$$

*Demostración.* Consideremos dos casos: cuando $a \geqslant 0$ y cuando $a < 0$.

I. Sea $a \geqslant 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\qquad}_{?}$, y la desigualdad (1) coincide con la condición del caso que estamos considerando ($a \geqslant 0$).

II. Sea $a < 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\qquad}_{?}$.

Al multiplicar la desigualdad $a < 0$ por $-1$ obtenemos $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$, así que

$$|a| = \underbrace{\qquad}_{?} > 0.$$

Por lo tanto, en este caso la desigualdad inestricta (1)
se convierte en una $\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}$ y también es válida. □

**7. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \leqslant |a|. \tag{2}$$

*Demostración.* Consideremos dos casos: cuando $a \geqslant 0$ y cuando $a < 0$.

I. Sea $a \geqslant 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\qquad}_{?}$, así que en este caso la desigualdad inestricta (2) se convierte en una $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}$ y es $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{correcta/incorrecta}}$.

II. Sea $a < 0$. Por el Teorema 6 sabemos que $|a| \geqslant 0$. De la cadena de desigualdades

$$a \underbrace{\qquad}_{?} 0 \underbrace{\qquad}_{?} |a|$$

concluimos que $\underbrace{\qquad\qquad}_{?}$, así que la desigualdad (2) se cumple. □

**8. Teorema (propiedad multiplicativa del valor absoluto).**
Para cualesquier $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$|ab| = |a|\,|b|. \tag{3}$$

*Demostración.* Consideremos todos los 4 casos posibles.

I. $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Escribimos los razonamientos con un diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& {|a| =} \arrow[dl] & a \geqslant 0 \arrow[l] \arrow[dr] & & \\
{|a|\,|b| =} & & & ab \geqslant 0 \arrow[r] & {|ab| =} \\
& {|b| =} \arrow[ul] & b \geqslant 0 \arrow[l] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Comparando las fórmulas obtenidas para $|a|\,|b|$ y $|ab|$ concluimos que en este caso la igualdad (3) se cumple.

II. $a \geqslant 0$, $b < 0$.

$$\begin{tikzcd}
& {|a| =} \arrow[dl] & a \geqslant 0 \arrow[l] \arrow[dr] & & \\
{|a|\,|b| =} & & & ab \leqslant 0 \arrow[r] & {|ab| = -ab} \\
& {|b| =} \arrow[ul] & b < 0 \arrow[l] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

III.

IV.

$\square$

**9. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$|-a| = |a|. \tag{4}$$

*Sugerencia para demostración.* Este teorema se puede deducir del Teorema 8. Más precisamente, se puede obtener del Teorema 8 al elegir un valor específico de $b$. Encuentre un $b$ tal que (3) se convierta en (4).

$\square$

**10. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-a \leqslant |a|. \tag{5}$$

*Sugerencia para demostración.* Este teorema se puede deducir de dos teoremas anteriores. ¿De cuáles?

$\square$

**11. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-|a| \leqslant a. \tag{6}$$

*Sugerencia.* Explique cómo obtener esta desigualdad de la desigualdad (5).

$\square$

**12. Teorema.** Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

*Demostración.* Se obtiene al juntar los Teoremas $\underbrace{\qquad}_{?}$ y 11. $\square$

**13. Ejemplo de una desigualdad con valor absoluto.**
Para cada $x \in \mathbb{Z}$, la desigualdad

$$|x| \leqslant 7$$

es equivalente a la desigualdad doble

$$-7 \leqslant x \leqslant 7,$$

así que su solución es el conjunto $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7\}$.

*Demostración.* La palabra *equivalente* significa que tenemos dos implicaciones por demostrar:

$$\begin{array}{lcl} |x| \leqslant 7 & \Longrightarrow & (-7 \leqslant x) \quad \wedge \quad (x \leqslant 7). \\ (-7 \leqslant x) \quad \wedge \quad (x \leqslant 7) & \Longrightarrow & |x| \leqslant 7. \end{array}$$

Empezamos el trabajo.

I. Supongamos que $|x| \leqslant 7$. Pasamos los términos a otros lados: $-7 \leqslant -|x|$.

Recordamos que $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ por el Teorema $\underbrace{\qquad}_{?}$.

Tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\underbrace{\qquad}_{?} \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant \underbrace{\qquad}_{?} \leqslant \underbrace{\qquad}_{?},$$

de donde concluimos que $-7 \leqslant x \leqslant 7$.

II. Supongamos que $-7 \leqslant x$ y $x \leqslant 7$. Tenemos por demostrar que $|x| \leqslant 7$. Esta parte de demostración se divide en dos casos: IIA $x \geqslant 0$; IIB $x < 0$.

IIA. $-7 \leqslant x$, $x \leqslant 7$, $x \geqslant 0$. En este caso

$$|x| = \underbrace{\qquad\qquad}_{¿x \text{ ó } -x?} \leqslant 7.$$

IIB. $-7 \leqslant x$, $x \leqslant 7$, $x < 0$. En este caso $\quad |x| = \underbrace{\qquad\qquad}_{¿x \text{ ó } -x?}$.

De la desigualdad $-7 \leqslant x$ obtenemos $-x \leqslant \underbrace{\qquad}_{?}$, así que

$$|x| = \underbrace{\qquad}_{?} \leqslant 7.$$

Hemos demostrado que en ambos casos IIA y IIB se cumple $|x| \leqslant 7$. La demostración es completa. $\square$

**14. Teorema.** Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $y \geqslant 0$. Entonces la desigualdad

$$|x| \leqslant y$$

es equivalente a la desigualdad doble

$$-y \leqslant x \leqslant y. \tag{7}$$

Se recomienda demostrar este teorema en una hoja de papel. Uno puede razonar como en la página anterior o inventar otros caminos.

**15. Ejemplo.** Usando el Teorema 14 resolver la siguiente desigualdad con $x$ entero:

$$|x| \leqslant 3 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{\qquad}_{?} \leqslant x \leqslant \underbrace{\qquad}_{?} \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \{-3, \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}\}.$$

**16. Teorema (propiedad subaditiva del valor absoluto).**
Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

*Demostración.* Recordamos que por el Teorema $\underbrace{\qquad}_{?}$,

$$-|a| \underbrace{\qquad}_{?} a \underbrace{\qquad}_{?} |a|, \qquad -|b| \underbrace{\qquad}_{?} b \underbrace{\qquad}_{?} |b|.$$

Sumamos estas dos desigualdades dobles (término a término):

$$-|a| - |b| \underbrace{\qquad}_{?} \underbrace{\qquad\quad}_{?} \underbrace{\qquad}_{?} |a| + |b|.$$

Obtuvimos una desigualdad doble de la forma (7), con

$$x = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}, \qquad y = \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$

Por el Teorema 14 podemos concluir que $|x| \leqslant y$, esto es,

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}.$$ □

**17. Teorema (sobre el valor absoluto de los números enteros no nulos).**
Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$. Entonces $|a| \geqslant 1$.

*Sugerencia.* Intente de explicar este resultado. □