

Propiedades del valor absoluto de números enteros (ejercicios)

1. Ejemplos.

$$|-6| = 6, \quad |8| = 8, \quad |23| = 23, \quad |0| = 0, \quad |-5| = 5.$$

Rellene los espacios:

$$|-4| = \underbrace{\quad}_{?}, \quad |15| = \underbrace{\quad}_{?}, \quad |-120| = \underbrace{\quad}_{?}, \quad |0| = \underbrace{\quad}_{?}.$$

2. Definición formal. El *valor absoluto* (o *módulo*) de un número entero a se define de la siguiente manera:

$$|a| := \begin{cases} a, & \text{si } a \geq 0; \\ -a, & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

3. Observación. Si $a = 0$, entonces $a = -a$ y $|a| = -a$. Por eso la definición anterior se puede escribir también de otra manera:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{si } a > 0; \\ -a, & \text{si } a \leq 0. \end{cases}$$

4. Un ejemplo más. Sea $a = -7$. Calcule $-a$ y $|-a|$:

$$-a = \underbrace{\quad}_{?}, \quad |-a| = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Determine si $|-a|$ en este ejemplo coincide con a o con $-a$:

$$\text{en este ejemplo } |-a| = \underbrace{\quad}_{\text{¿}a \text{ ó } -a?}.$$

Este ejemplo muestra que la receta informal “quitar el signo” puede ser confusa.

5. Desigualdades inestrictas. De las siguientes afirmaciones indique todas las correctas:

- Si $a > 7$, entonces también podemos escribir $a \geq 7$.
- Si $a > 7$, entonces no podemos escribir $a \geq 7$.
- Si $a = 7$, entonces es cierto que $a \geq 7$.
- Si $a = 7$, entonces no es cierto que $a \geq 7$.
- Si $a \geq 7$, entonces $a > 7$.
- Si $a \geq 7$, entonces $a > 7$ o $a = 7$.

6. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$|a| \geq 0. \tag{1}$$

Demostración. Consideremos dos casos: cuando $a \geq 0$ y cuando $a < 0$.

I. Sea $a \geq 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$, y la desigualdad (1) coincide con la condición del caso que estamos considerando ($a \geq 0$).

II. Sea $a < 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

Al multiplicar la desigualdad $a < 0$ por -1 obtenemos $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$, así que

$$|a| = \underbrace{\hspace{2cm}}_? > 0.$$

Por lo tanto, en este caso la desigualdad inestricta (1)

se convierte en una $\underbrace{\hspace{4cm}}_?$ y también es válida. \square

7. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$a \leq |a|. \tag{2}$$

Demostración. Consideremos dos casos: cuando $a \geq 0$ y cuando $a < 0$.

I. Sea $a \geq 0$. Entonces $|a| = \underbrace{\hspace{2cm}}_?$, así que en este caso la desigualdad inestricta (2)

se convierte en una $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$ y es $\underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{correcta/incorrecta}}$.

II. Sea $a < 0$. Por el Teorema 6 sabemos que $|a| \geq 0$. De la cadena de desigualdades

$$a \underbrace{\hspace{1cm}}_? \quad 0 \underbrace{\hspace{1cm}}_? \quad |a|$$

concluimos que $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$, así que la desigualdad (2) se cumple. \square

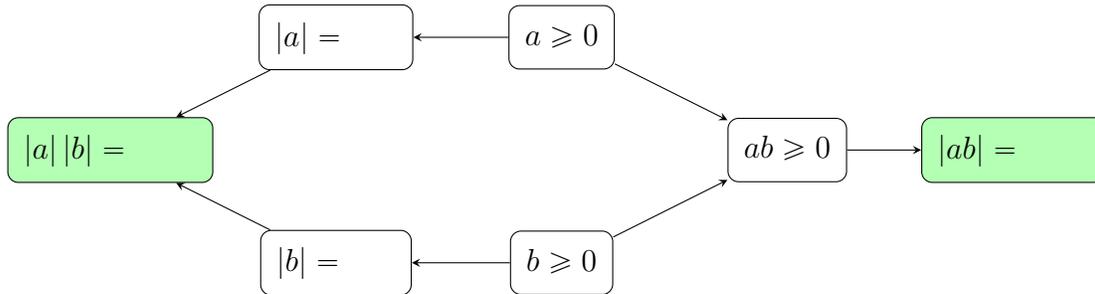
8. Teorema (propiedad multiplicativa del valor absoluto).

Para cualesquier $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$|ab| = |a| |b|. \tag{3}$$

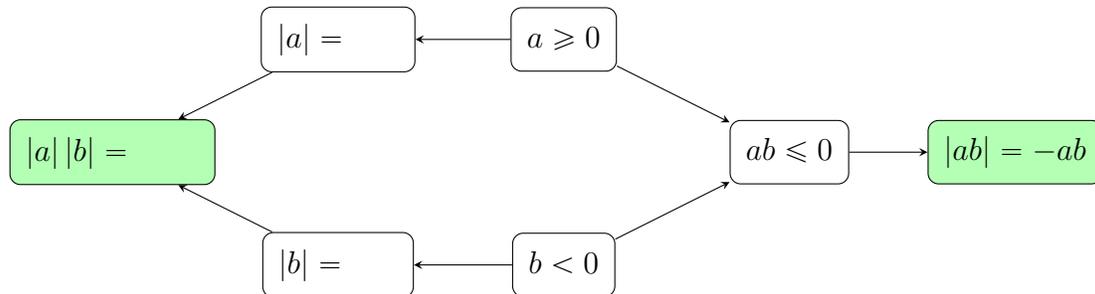
Demostración. Consideremos todos los 4 casos posibles.

I. $a \geq 0, b \geq 0$. Escribimos los razonamientos con un diagrama.



Comparando las fórmulas obtenidas para $|a| |b|$ y $|ab|$ concluimos que en este caso la igualdad (3) se cumple.

II. $a \geq 0, b < 0$.



III.

IV.

□

9. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$|-a| = |a|. \quad (4)$$

Sugerencia para demostración. Este teorema se puede deducir del Teorema 8. Más precisamente, se puede obtener del Teorema 8 al elegir un valor específico de b . Encuentre un b tal que (3) se convierta en (4).

□

10. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-a \leq |a|. \quad (5)$$

Sugerencia para demostración. Este teorema se puede deducir de dos teoremas anteriores. ¿De cuáles?

□

11. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-|a| \leq a. \quad (6)$$

Sugerencia. Explique cómo obtener esta desigualdad de la desigualdad (5).

□

12. Teorema. Para cada $a \in \mathbb{Z}$,

$$-|a| \leq a \leq |a|.$$

Demostración. Se obtiene al juntar los Teoremas $\underbrace{\hspace{2cm}}$ y 11.

□

13. Ejemplo de una desigualdad con valor absoluto.

Para cada $x \in \mathbb{Z}$, la desigualdad

$$|x| \leq 7$$

es equivalente a la desigualdad doble

$$-7 \leq x \leq 7,$$

así que su solución es el conjunto $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7\}$.

Demostración. La palabra *equivalente* significa que tenemos dos implicaciones por demostrar:

$$\begin{aligned} |x| \leq 7 &\implies (-7 \leq x) \wedge (x \leq 7). \\ (-7 \leq x) \wedge (x \leq 7) &\implies |x| \leq 7. \end{aligned}$$

Empezamos el trabajo.

I. Supongamos que $|x| \leq 7$. Pasamos los términos a otros lados: $-7 \leq -|x|$.

Recordamos que $-|x| \leq x \leq |x|$ por el Teorema $\underbrace{\hspace{2cm}}_?$.

Tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\underbrace{\hspace{2cm}}_? \leq -|x| \leq x \leq \underbrace{\hspace{2cm}}_? \leq \underbrace{\hspace{2cm}}_?,$$

de donde concluimos que $-7 \leq x \leq 7$.

II. Supongamos que $-7 \leq x$ y $x \leq 7$. Tenemos por demostrar que $|x| \leq 7$. Esta parte de demostración se divide en dos casos: IIA $x \geq 0$; IIB $x < 0$.

IIA. $-7 \leq x$, $x \leq 7$, $x \geq 0$. En este caso

$$|x| = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿}x \text{ ó } -x?} \leq 7.$$

IIB. $-7 \leq x$, $x \leq 7$, $x < 0$. En este caso $|x| = \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{¿}x \text{ ó } -x?}$.

De la desigualdad $-7 \leq x$ obtenemos $-x \leq \underbrace{\hspace{2cm}}_?$, así que

$$|x| = \underbrace{\hspace{2cm}}_? \leq 7.$$

Hemos demostrado que en ambos casos IIA y IIB se cumple $|x| \leq 7$. La demostración es completa. \square

14. Teorema. Sean $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que $y \geq 0$. Entonces la desigualdad

$$|x| \leq y$$

es equivalente a la desigualdad doble

$$-y \leq x \leq y. \tag{7}$$

Se recomienda demostrar este teorema en una hoja de papel. Uno puede razonar como en la página anterior o inventar otros caminos.

15. Ejemplo. Usando el Teorema 14 resolver la siguiente desigualdad con x entero:

$$|x| \leq 3 \iff \underbrace{\quad}_{?} \leq x \leq \underbrace{\quad}_{?} \iff x \in \{-3, \underbrace{\quad}_{?}\}.$$

16. Teorema (propiedad subaditiva del valor absoluto).

Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Demostración. Recordamos que por el Teorema $\underbrace{\quad}_{?}$,

$$-|a| \underbrace{\quad}_{?} a \underbrace{\quad}_{?} |a|, \quad -|b| \underbrace{\quad}_{?} b \underbrace{\quad}_{?} |b|.$$

Sumamos estas dos desigualdades dobles (término a término):

$$-|a| - |b| \underbrace{\quad}_{?} \underbrace{\quad}_{?} \underbrace{\quad}_{?} |a| + |b|.$$

Obtuvimos una desigualdad doble de la forma (7), con

$$x = \underbrace{\quad}_{?}, \quad y = \underbrace{\quad}_{?}.$$

Por el Teorema 14 podemos concluir que $|x| \leq y$, esto es,

$$\underbrace{\quad}_{?}.$$

□

17. Teorema (sobre el valor absoluto de los números enteros no nulos).

Sea $a \in \mathbb{Z}$ tal que $a \neq 0$. Entonces $|a| \geq 1$.

Sugerencia. Intente de explicar este resultado.

□