Vectores en el plano con punto inicial fijo

Objetivos. Considerar el conjunto $V^2(O)$ de los vectores en el plano euclidiano (también llamados *segmentos dirigidos* o *flechas*) con un punto inicial fijo. Definir las operaciones lineales en $V^2(O)$, mencionar sus propiedades principales y algunas ideas de las demostraciones.

Requisitos. Elementos de la geometría euclidiana.

Conjunto $V^2(O)$

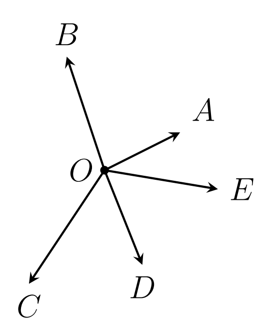
1. El plano euclidiano. Consideremos el *plano euclidiano*, que se estudia en la geometría elemental y que se define de manera formal mediante los *axiomas de Euclides y Hilbert* (vease el libro: Hilbert "Fundamentos de la geometría").

Vamos a usar algunas nociones básicas de la geometría del plano:

- un punto A *pertenece* a una recta BC;
- una punto A *está entre* puntos B y C (en una recta BC);
- puntos A y B están *por un lado* de un punto C (en una misma recta);
- *segmentos* (segmentos de rectas);
- segmentos AB y CD tienen la misma *longitud*: $|AB| = |CD|$;

  etc.

2. Conjunto $V^2(O)$: segmentos dirigidos en el plano con punto inicial fijo. Fijemos un punto O en el plano. Denotemos por $V^2(O)$ al conjunto de todos los *segmentos dirigidos* (también llamados *flechas*) que inician en el punto O, esto es, el conjunto de todos los segmentos dirigidos de la forma $\overrightarrow{OA}$, donde A es cualquier punto del plano.



3. Igualdad de elementos del conjunto $V^2(O)$. Segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ se llaman *iguales* si sus puntos finales coinciden: $A = B$.

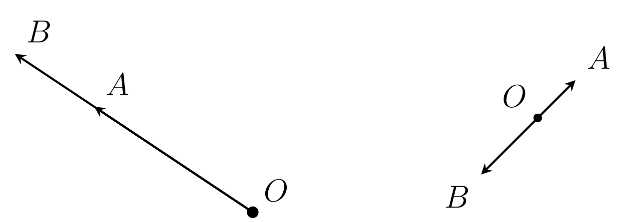
4. Observación. Los elementos de $V^2(O)$ se pueden identificar con los puntos del plano: a un segmento dirigido $\overrightarrow{OA}$ le corresponde su punto terminal A.

5. Segmentos dirigidos colineales y no colineales. Para todos puntos A, B siempre se cumple una y sólo una de las siguientes dos condiciones:

- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son *colineales* ($\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{OB}$),
  esto es, existe una recta ℓ que pasa por O, A y B;
- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ *no son colineales* ($\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$),
  esto es, $A \neq O$, $B \neq O$, y las rectas OA y OB intersectan sólo en O.

6. Segmentos dirigidos codirigidos y contradirigidos. Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ segmentos dirigidos colineales. Entonces se cumple una y sólo una de las siguientes dos condiciones:

- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son *codirigidos* ($\overrightarrow{OA} \upuparrows \overrightarrow{OB}$),
  esto es, A y B están por un lado del punto O,
  ó uno de los puntos A y B coincide con O, ó $A = B = O$;
- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son *contradirigidos* ($\overrightarrow{OA} \uparrow\downarrow \overrightarrow{OB}$),
  esto es, O está entre A y B.

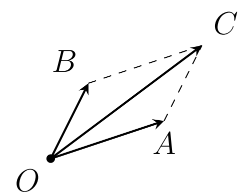


Operaciones lineales en $V^2(O)$

7. Suma de dos elementos de $V^2(O)$. Sean $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V^2(O)$.
Para definir su *suma* $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, consideremos varios casos:

- El caso principal: $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ no son colineales, esto es,
  $A \neq O$, $B \neq O$, y las rectas OA y OB se cruzan en un sólo punto O.

  En este caso el segmento dirigido $\overrightarrow{OC}$ se define por la *regla de paralelogramo*, esto es, C es el cuarto vértice del paralelogramo con los lados OA y OB:

- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son codirigidos y no nulos, esto es,
  $A \neq O$, $B \neq O$, y los puntos A y B están por un lado de O.
  En este caso C está por este mismo lado de O y $|OC| = |OA| + |OB|$.

- $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son contradirigidos y $|OA| > |OB|$.
  En este caso C y A están por un lado de O y $|OC| = |OA| - |OB|$.

- $A \neq O$, $B = O$. En este caso $C = A$.

- $\ldots$ (escriba los casos restantes).

8. Ejercicio. Terminar la definición (considerar todos los casos).

9. Producto de un elemento de $V^2(O)$ por un número real. Sean $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. El *producto* de $\overrightarrow{OA}$ por λ (notación: $\lambda\overrightarrow{OA}$),
se define como $\overrightarrow{OB}$, donde el punto B, a su vez, se define mediane las siguentes reglas:

- si $A = O$ ó $\lambda = 0$, entonces $B = O$;
- si $A \neq O$ y $\lambda > 0$, entonces B y A están por un lado de O y $|OB| = \lambda|OA|$;
- si $A \neq O$ y $\lambda < 0$, entonces O está entre A y B y $|OB| = |\lambda| \cdot |OA|$.

10. Nota acerca de otras operaciones en $V^2(O)$. Ahora vamos a considerar el conjunto $V^2(O)$ sólo con la operación de adición y la operación de multiplicación por números reales. Estas dos operaciones se llaman *operaciones lineales* en $V^2(O)$. El espacio $V^2(O)$ con estas operaciones es un ejemplo importante de *espacio vectorial*.

Es posible definir otras operaciones en $V^2(O)$. Por ejemplo, el producto interno (producto escalar):

$$\langle\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\rangle = |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos\angle AOB.$$

Esta operación también es importante, pero no se considera ahora.

Propiedades de la adición en $V^2(O)$

11. Propiedad asociativa. La adición en $V^2(O)$ cumple con la propiedad asociativa: para todos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC} \in V^2(O)$

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

12. Tarea adicional. Demuestre el teorema para el caso "no degenerado" ningunos dos de los segmentos dirigidos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ son colineales.

13. Propiedad conmutativa. La adición en $V^2(O)$ cumple con la propiedad conmutativa: para todos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V^2(O)$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}.$$

Esta propiedad es obvia, porque la definición de la suma es simétrica respecto a los sumandos.

14. Segmento dirigido nulo en $V^2(O)$. El segmento dirigido $\overrightarrow{OO}$ se llama *segmento dirigido nulo* (o *degenerado*).

Inmediatamente de la definición de la suma se deduce:

15. Propiedad principal del segmento dirigido nulo. Para todo $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA} \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA},$$

esto es, el vector $\overrightarrow{OO}$ es un elemento neutro con respecto a la adición.

16. Segmento dirigido opuesto. Sea $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$. El segmento dirigido *opuesto a* $\overrightarrow{OA}$, denotado por $-\overrightarrow{OA}$, se define como $\overrightarrow{OA'}$, donde el punto A' se define por las siguientes reglas:

- si $A = O$, entonces $A' = O$;
- si $A \neq O$, entonces A' está en la recta OA, O está entre A y A', $|OA'| = |OA|$.

Por la definición de la suma, tenemos la siguiente

17. Propiedad principal del segmento dirigido opuesto.

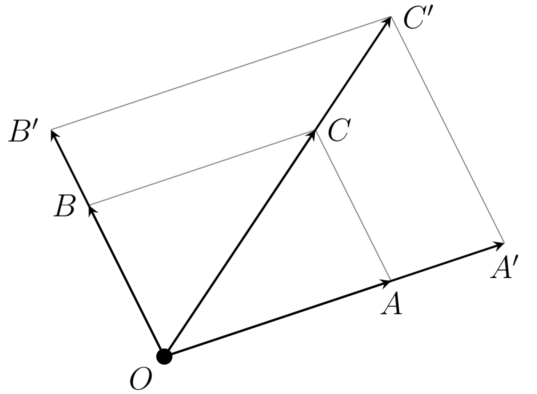
$$\forall \overrightarrow{OA} \in V^2(O) \qquad \overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OO} \qquad \text{y} \qquad (-\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}.$$

Propiedades de la multiplicación por números reales en $V^2(O)$

18. Propiedad distributiva respecto a la adición en $V^2(O)$. La multiplicación de los elementos de $V^2(O)$ por números reales cumple con la propiedad *distributiva* respecto a la adición en $V^2(O)$: para todos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \in V^2(O)$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}.$$

El dibujo para el caso cuando $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{OB}$ y $\lambda > 0$:



Aquí por la construcción
$\overrightarrow{OA'} := \lambda\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} := \lambda\overrightarrow{OB}$,
$\overrightarrow{OC} := \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} := \lambda\overrightarrow{OC}$.
Hay que probar que
$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'}$.

19. Propiedad distributiva respecto a la adición en $\mathbb{R}$. La multiplicación de los elementos de $V^2(O)$ por números reales cumple con la propiedad *distributiva* respecto a la adición en $\mathbb{R}$:
para todo $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda + \mu)\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OA}.$$

20. Propiedad homogénea. Para todo $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$ y todos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\mu\overrightarrow{OA}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{OA}.$$

21. Propiedad de multiplicación por 1. Para todo $\overrightarrow{OA} \in V^2(O)$,

$$1\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}.$$

Resumen

22. Lista de propiedades. Hemos definido el conjunto $V^2(O)$, la adición de los elementos de $V^2(O)$ y la multiplicación de los elementos de $V^2(O)$ por números reales. Hemos visto que estas operaciones cumplen con las siguientes propiedades (A, B, C son puntos arbitrarios del plano, λ, μ son números reales arbitrarios):

- $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OO} = \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{OO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$.
- $\overrightarrow{OA} + (-\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OO}, \quad (-\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$.
- $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$.
- $\lambda(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \lambda\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$.
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{OA} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OA}$.
- $\lambda(\mu\overrightarrow{OA}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{OA}$.
- $1\,\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA}$.

23. Nota. El conjunto $V^2(O)$ dotado con las operaciones lineales definidas arriba es un ejemplo de *espacio vectorial real*.