V^2: vectores libres en el plano

Egor Maximenko

ESFM del IPN

8 de agosto de 2009

Contenido

Contenido

Segmentos dirigidos equivalentes

Consideremos segmentos dirigidos en el plano euclidiano.

Dos segmentos dirigidos se llaman equivalentes,
si tienen la misma dirección y la misma longitud.
Notación: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Segmentos dirigidos equivalentes

Consideremos segmentos dirigidos en el plano euclidiano.

Dos segmentos dirigidos se llaman equivalentes,
si tienen la misma dirección y la misma longitud.
Notación: $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Teorema

Para todo $\overrightarrow{AB}$ y todo punto C existe un único punto D tal que $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$.

Propiedades de equivalencia de segmentos dirigidos

Teorema (propiedades de equivalencia de segmentos dirigidos)

La relación de equivalencia de segmentos dirigidos cumple las siguientes propiedades:

- $\forall A, B, \qquad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB};$
- $\forall A, B, C, D, \qquad$ *si* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, *entonces* $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB};$
- $\forall A, B, C, D, E, F, \qquad$ *si* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ *y* $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$, *entonces* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}.$

Las propiedades de la relación de equivalencia implican que el conjunto de todos los segmentos dirigidos se puede partir en clases de equivalencia.

Vectores libres como clases de equivalencia

Definición

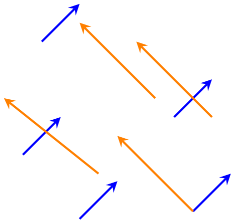
Clases de equivalencia se segmentos dirigidos en el plano
se llaman vectores libres en el plano.
El conjunto de todos los vectores libres en el plano denotemos por V^2.

Vectores libres como clases de equivalencia

Definición

Clases de equivalencia se segmentos dirigidos en el plano
se llaman vectores libres en el plano.
El conjunto de todos los vectores libres en el plano denotemos por V^2.

Cada vector libre es un conjunto infinito, cuyos elementos (representantes) son segmentos dirigidos, equivalentes entre sí.



En este dibujo

todos segmentos dirigidos de color azul
son representantes de un vector libre $\overrightarrow{a}$,

y todos segmentos dirigidos de color naranja
son representantes de otro vector libre $\overrightarrow{b}$.

Relaciones entre vectores libres y segmentos dirigidos

Definición

Cada segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ "genera" un vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ que consiste en todos los segmentos dirigidos equivalentes a $\overrightarrow{AB}$:

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\overrightarrow{CD} \colon \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Relaciones entre vectores libres y segmentos dirigidos

Definición

Cada segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ "genera" un vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ que consiste en todos los segmentos dirigidos equivalentes a $\overrightarrow{AB}$:

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\overrightarrow{CD} \colon \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Si el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ es uno de los representantes del vector libre $\overrightarrow{a}$, entonces el "genera" $\overrightarrow{a}$. Así pues:

$$\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}].$$

Relaciones entre vectores libres y segmentos dirigidos

Definición

Cada segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ "genera" un vector libre $[\overrightarrow{AB}]$ que consiste en todos los segmentos dirigidos equivalentes a $\overrightarrow{AB}$:

$$[\overrightarrow{AB}] := \{\overrightarrow{CD} : \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

Si el segmento dirigido $\overrightarrow{AB}$ es uno de los representantes del vector libre $\overrightarrow{a}$, entonces el "genera" $\overrightarrow{a}$. Así pues:

$$\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}].$$

Teorema

Sean $\overrightarrow{a} \in V^2$ y A un punto.
Entonces $\exists!$ punto B tal que $\overrightarrow{AB}$ es uno de los representantes de $\overrightarrow{a}$.
Se dice que $\overrightarrow{AB}$ es el representante de $\overrightarrow{a}$ en el punto A.

Contenido

Suma de vectores libres

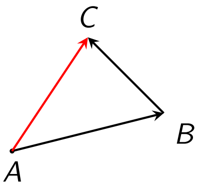
Sean $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V^2$ y A un punto del plano.
El representante de $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ en el punto A
se define por la regla de triangulo:

Construyamos los puntos B y C tales que

$\overrightarrow{AB}$ es el representante de $\overrightarrow{a}$ en el punto A,

$\overrightarrow{BC}$ es el representante de $\overrightarrow{b}$ en el punto B.

Definamos $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ como vector libre conteniendo $\overrightarrow{AC}$.



$$\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{BC} \in \overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} := [\overrightarrow{AC}]$$

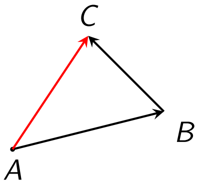
Suma de vectores libres

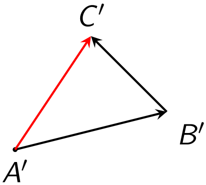
Hay que demostrar que la definición de suma es correcta, i.e. no depende de la elección del punto A.

Suma de vectores libres

Hay que demostrar que la definición de suma es correcta,
i.e. no depende de la elección del punto A.

En otras palabras, hay que probar que los representantes de $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$,
definidos en esta manera en dos puntos arbitrarios A y A',
son equivalentes entre sí (y por eso generan el mismo vector libre).

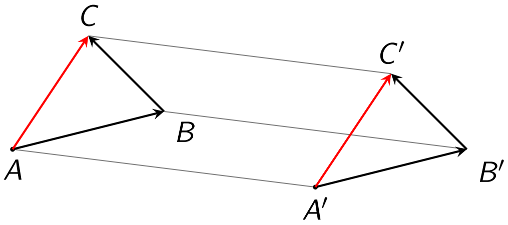




Suma de vectores libres

Hay que demostrar que la definición de suma es correcta,
i.e. no depende de la elección del punto A.

En otras palabras, hay que probar que los representantes de $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$,
definidos en esta manera en dos puntos arbitrarios A y A',
son equivalentes entre sí (y por eso generan el mismo vector libre).



La demostración puede ser basada en las propiedades de paralelogramos.

Producto de un vector libre por un número real

Para definir el producto de un vector libre por un número real,
es cómodo usar el espacio $V^2(O)$ que hemos considerado antes.

Sean $\overrightarrow{a} \in V^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y A un punto en el plano.
El representante de $\lambda\overrightarrow{a}$ en el punto A
definamos como $\lambda\overrightarrow{AB}$ en $V^2(A)$.

Hay que probar que esta definición es correcta, i.e. representantes del vector libre $\lambda\overrightarrow{a}$ en todos puntos del plano son equivalentes entre sí.

Contenido

V^2 como espacio vectorial real

Las operaciones lineales en V^2 cumplen las sigientes propiedades:

- $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$
- existe $\mathbf{0} = [\overrightarrow{AA}]$ tal que $\overrightarrow{a} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$ para todos $\overrightarrow{a}$
- para cada $\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{AB}]$ existe $-\overrightarrow{a} = [\overrightarrow{BA}]$
  tal que $\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = (-\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a} = \mathbf{0}$
- $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$
- $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}$
- $\lambda(\mu\overrightarrow{a}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{a}$
- $1\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a}$

El conjunto V^2 con estas operaciones
es un ejemplo de *espacio vectorial real*.