Desigualdad de Schwarz

Objetivos. Demostrar la siguiente propiedad del producto interno:

$$\big|\langle a, b\rangle\big|^2 \le \langle a, a\rangle\,\langle b, b\rangle.$$

Esta desigualdad fue demostrada para varios casos particulares en trabajos de Cauchy, Bunyakovski y Schwarz. La demostración de Schwarz se puede aplicar al caso general.

Requisitos. La demostración de la desigualdad de Schwarz que vamos a estudiar está fuertemente basada en el concepto de *proyección ortogonal de un vector sobre otro*. Se recomienda repasar este tema.

En estos apuntes usamos el convenio que en el caso complejo el producto interno es homogéneo respecto al segundo argumento:

$$\forall a, b \in V \quad \lambda \in \mathbb{C} \qquad \langle a, \lambda b\rangle = \lambda\,\langle a, b\rangle.$$

1. Ejercicio. Sean a, b vectores de un espacio vectorial con producto interno. Demuestre que

$$\langle a, b\rangle\,\langle b, a\rangle \;=\; |\langle a, b\rangle|^2.$$

2. Teorema (desigualdad de Schwarz). Sea V un espacio vectorial complejo o real con un producto interno $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Entonces para todos $a, b \in V$

$$|\langle a, b\rangle|^2 \le \langle a, a\rangle\,\langle b, b\rangle. \tag{1}$$

Demostración. Si $a = \mathbf{0}$, entonces la desigualdad toma la forma $0 \le 0$ y es válida.

Consideremos el caso $a \neq \mathbf{0}$. Pongamos

$$\lambda := \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}, \qquad c := b - \lambda a.$$

Mostremos que $\langle a, c\rangle = 0$:

$$\langle a, c\rangle = \langle a, b - \lambda a\rangle = \langle a, b\rangle - \lambda\langle a, a\rangle = \langle a, b\rangle - \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}\langle a, a\rangle = 0.$$

Calculemos $\langle c, c\rangle$:

$$\langle c, c\rangle = \langle b - \lambda a, c\rangle = \langle b, c\rangle - \overline{\lambda}\,\underbrace{\langle a, c\rangle}_{0} = \langle b, c\rangle$$

$$= \langle b, b - \lambda a\rangle = \langle b, b\rangle - \frac{\langle a, b\rangle}{\langle a, a\rangle}\,\langle b, a\rangle = \langle b, b\rangle - \frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle a, a\rangle}.$$

Por otro lado, de la definición de producto interno sigue que $\langle c, c\rangle \ge 0$. Esto implica que $|\langle a, b\rangle|^2 \le \langle a, a\rangle\,\langle b, b\rangle$. □

3. Ejercicio (criterio para la dependencia lineal de dos vectores, repaso). Sean a, b elementos de un espacio vectorial V. Demuestre que a, b son linealmente dependientes si, y sólo si, se cumple una de las siguientes condiciones:

(i) $a = \mathbf{0}$.

(ii) $a \neq \mathbf{0}$ y existe un escalar λ tal que $b = \lambda a$.

4. Ejercicio (criterio para que la desigualdad de Schwarz se convierta en una igualdad). Demuestre que $|\langle a, b\rangle|^2 = \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle$ si, y sólo si, los vectores a, b son linealmente dependientes. Indicación: considere por separado los casos $a = \mathbf{0}$ y $a \neq \mathbf{0}$. En el caso $a \neq \mathbf{0}$ puede usar ideas de la demostración del teorema y empezar los razonamientos de la siguiente manera:

$$|\langle a, b\rangle|^2 = \langle a, a\rangle \langle b, b\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad \langle b, b\rangle - \frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle a, a\rangle} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots .$$

5. Corolario (desigualdad para las sumas, Augustin-Louis Cauchy, 1821). En el espacio $\mathbb{C}^n$ con el producto interno canónico la desigualdad (1) toma la siguiente forma (*desigualdad de Cauchy*):

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2 \right).$$

6. Corolario (desigualdad para integrales, Viktor Bunyakovski, 1859, Hermann Amandus Schwarz, 1888). Consideramos el espacio vectorial complejo $C([\alpha, \beta], \mathbb{C})$ de las funciones continuas $[\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, dotado con el producto interno

$$\langle f, g\rangle \coloneqq \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt.$$

Aquí la desiguldad (1) toma la siguiente forma (*desigualdad de Bunyakovski–Schwarz*):

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(t)}\, g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t)|^2\, dt \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)|^2\, dt.$$

7. Observación: desigualdad de Schwarz, proyección ortogonal y el proceso de ortogonalización de Gram–Schmidt. La construcción del vector c en la demostración del teorema está relacionado con el concepto de *proyección ortogonal* y es un paso de la *ortogonalización de Gram–Schmidt*. Vamos a estudiar estos temas a continuación.

8. Observación: desigualdad de Schwarz como una caso particular de la desigualdad de Bessel. La desigualdad (1) en el caso $a \neq 0$ se puede escribir de la forma

$$\frac{|\langle a, b\rangle|^2}{\langle a, a\rangle} \leq \langle b, b\rangle$$

y es un caso particular de la *desigualdad de Bessel* que vamos a estudiar a continuación.