Triangulación de Schur (descomposición de Schur)

Objetivos. Demostrar que para cada operador en un espacio unitario (un espacio vectorial complejo con producto interno) existe una base ortonormal tal que la matriz asociada es triangular superior. Versión para matrices: cada matriz compleja cuadrada es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior.

Requisitos. Base ortonormal, la matriz asociada a un operador respecto a una base, matriz triangular superior, valores y vectores propios, subespacio propio, subespacio invariante, complemento ortogonal, compresión de un operador lineal a un subespacio invariante.

1 Repaso (el espectro de un operador lineal en un espacio vectorial complejo de dimensión finita no es vacío)**.** Si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, $\dim(V) \geq 1$ y $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\operatorname{sp}(T) \neq \varnothing$. Para la demostración se considera el polinomio característico o el polinomio mínimo de T y se aplica el teorema de completez algebraica del campo $\mathbb{C}$: cualquier polinomio de grado ≥ 1 con coeficientes complejos tiene por lo menos una raíz compleja.

2 Repaso (espacio unitario)**.** Un *espacio unitario* es un espacio vectorial complejo de dimensión finita, con un producto interno elegido. Es fácil de ver que un espacio unitario es completo respecto a la distancia inducida por el producto interno. Por lo tanto, también se utiliza el término *espacio de Hilbert de dimensión finita*.

3 Proposición (para cada valor propio existe un vector propio de norma 1)**.** *Si V es un espacio unitario,* $\dim(V) \geq 1$ $T \in \mathcal{L}(V)$ *y* $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$*, entonces existe u en V tal que* $\|u\| = 1$ *y* $Tu = \lambda u$.

Demostración. Elegimos $\lambda \in \operatorname{sp}(T)$. Como $\lambda I_V - T$ no es invertible, $\lambda I_V - T$ no es inyectivo. En otras palabras, existe un vector propio de T asociado al valor propio λ. Elegimos $v \in V \setminus \{\mathbf{0}_V\}$ tal que $Tv = \lambda v$. Entonces,

$$u \coloneqq \frac{1}{\|v\|}\, v$$

Es fácil de ver que $\|u\| = 1$ y $Tu = \lambda u$. □

4 Lema (de los subespacios invariantes de un operador lineal y su adjunto)**.** *Sean V un espacio unitario, $T \in \mathcal{L}(V)$ y W un subespacio invariante bajo T. Entonces, el subespacio $W^\perp$ es invariante bajo T^*.*

Demostración. Sea $a \in W^\perp$, esto es, $a \perp W$. Para cada w en W tenemos que

$$\langle T^* a, w\rangle = \langle a, Tw\rangle = 0$$

porque $Tw \in W$. Hemos demostrado que $T^* \in W^\perp$. □

5 Lema (criterio para que la matriz asociada a un operador lineal sea triangular superior)**.** *Sean V un espacio unitario, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. La matriz $T_\mathcal{B}$ es triangular superior si, y sólo si,*

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad Tb_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k).$$

Demostración. Por brevedad, denotemos la matriz $T_\mathcal{B}$ por A. Recordemos la definición de esta matriz y la escribamos en una forma cómoda:

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad Tb_k = \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^{k} A_{j,k} b_j + \sum_{j=k+1}^{n} A_{j,k} b_j.$$

Ahora estamos listos para demostrar la equivalencia de dos afirmaciones del lema. Si A es triangular superior, entonces $A_{j,k} = 0$ para $j > k$, y la segunda suma en la expresión anterior desaparece:

$$Tb_k = \sum_{j=1}^{k} A_{j,k} b_j \in \ell(b_1, \ldots, b_k).$$

Al revés, si $Tb_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k)$ para cada k, entonces por la unicidad de la descomposición de un vector respecto a una base, los números $A_{j,k}$ con $j > k$ son cero, lo que significa que la matriz A es triangular superior. □

6 Teorema (triangulación ortonormal de un operador lineal en un espacio unitario)**.** *Si V es un espacio unitario y $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada $T_\mathcal{B}$ es triangular superior.*

Demostración. Procedemos por inducción sobre la dimensión del espacio V. En otras palabras, vamos a demostrar que para cada n en $\mathbb{N}$ se cumple la siguiente afirmación $\Phi(n)$: para cada espacio unitario V de dimensión n y cada T en $\mathcal{L}(V)$, existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada $T_\mathcal{B}$ es triangular superior.

Demostremos $\Phi(1)$. Sea V un espacio unitario de dimensión 1 y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Elegimos un vector normalizado b_1 en V. Entonces, la lista $\mathcal{B} = (b_1)$ es una base ortonormal de V. La matriz asociada $T_\mathcal{B}$ consiste de una sola componente y por lo tanto es triangular superior.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, y se cumple $\Phi(n-1)$. (es la hipótesis de inducción). Demostremos $\Phi(n)$. Sea V un espacio unitario de dimensión n y sea $T \in \mathcal{L}(V)$.

Como estamos considerando el caso complejo, el espectro del operador T^* no es vacío. Elegimos $d_n \in T^*$. Aplicando la Proposición 3 al operador T^*, encontramos b_n en V tal que $\|b_n\| = 1$ y $T^* b_n = d_n b_n$. Entonces, $\ell(b_n)$ es un subespacio invariante del operador T^*, y su complemento ortogonal

$$W \coloneqq \ell(b_n)^\perp$$

es un subespacio invariante del operador T. Denotemos por R a la compresión de T al subespacio W:

$$R\colon W \to W, \qquad R(v) \coloneqq T(v) \qquad \forall v \in W.$$

Obviamente, $R \in \mathcal{L}(W)$. Notemos que $\dim(W) = n-1$. Por la hipótesis de inducción, aplicada al espacio W y el operador R, existe una base ortonormal $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ de W tal que la matriz $R_{\mathcal{A}}$ es triangular superior, esto es,

$$Tb_k = Rb_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k) \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$

Pongamos $\mathcal{B} \coloneqq (b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$. Como $b_1, \ldots, b_{n-1} \in W = \ell(b_n)^{\perp}$, la lista $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de V. Las igualdades (1) significan que la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. □

Ahora veamos la versión matricial de este teorema.

7 Definición (triangulación de Schur de una matriz compleja cuadrada)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un par de matrices (Q, U), donde $Q \in U_n(\mathbb{C})$ y $B \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{C})$, tales que $A = QBQ^*$, se llama *triangulación de Schur* o *descomposición de Schur* de la matriz A.

8 Teorema (triangulación de Schur de una matriz compleja cuadrada)**.** *Para cada A en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, existe una triangulación de Schur.*

9 Observación (hay matrices cuya triangulación de Schur no es única)**.** Para cada matriz unitaria $Q \in U_2(\mathbb{C})$,

$$I_2 = QI_2Q^*,$$

así que la factorización de Schur de la matriz I_2 no es única.