Triangulación de Schur (descomposición de Schur)

Objetivos. Demostrar que para todo operador en un espacio unitario existe una base ortonormal tal que la matriz asociada es triangular superior. Versión para matrices: toda matriz compleja cuadrada es unitariamente equivalente a una matriz triangular superior.

Requisitos. Base ortonormal, matriz asociada, matriz triangular superior, valores y vectores propios, subespacio propio, subespacio invariante, compresión de un operador lineal a un subespacio invariante.

1. Repaso: el espectro de un operador lineal en un espacio vectorial complejo de dimensión finita no es vacío. Recordamos que si V es un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T \in \mathcal{L}(V)$, entonces $\operatorname{sp}(T) \neq \varnothing$. Para la demostración se considera el polinomio característico o el polinomio mínimo de T y se aplica el teorema que cualquier polinomio con coeficientes complejos tiene por lo menos una raíz compleja.

2. Observación: para todo valor propio de un operador lineal en un espacio unitario existe un vector propio de norma 1. En realidad, si $v \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$ y $Tv = \lambda v$, entonces el vector

$$u := \frac{1}{\|v\|}\, v$$

tiene las siguientes propiedades: $\|u\| = 1$ y $Tu = \lambda u$.

3. Lema (de los subespacios invariantes bajo un operador lineal y su adjunto). Sean V un espacio unitario, $T \in \mathcal{L}(V)$ y W un subespacio invariante bajo T. Entonces el subespacio $W^\perp$ es invariante bajo T^*.

Demostración. Sea $a \in W^\perp$, esto es, $a \perp W$. Entonces para todo $w \in W$ tenemos

$$\langle T^* a, w\rangle = \langle a, Tw\rangle = 0$$

porque $Tw \in W$. □

4. Lema (criterio para que la matriz asociada a un operador lineal sea triangular superior). Sean V un espacio unitario, $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ una base de V. Entonces la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es triangular superior si, y sólo si,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad T b_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k).$$

Demostración. Para simplificar la notación denotemos la matriz $T_{\mathcal{B}}$ por A. Por la definición de la matriz asociada a un operador lineal,

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \qquad T b_k = \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} b_j = \sum_{j=1}^{k} A_{j,k} b_j + \sum_{j=k+1}^{n} A_{j,k} b_j.$$

Si A es triangular superior, entonces $A_{j,k} = 0$ para $j > k$, y

$$Tb_k = \sum_{j=1}^{k} A_{j,k} b_j \in \ell(b_1, \ldots, b_k).$$

Al revés, si $Tb_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k)$ para cada k, entonces por la unicidad de la descomposición de un vector respecto a una base, los números $A_{j,k}$ con $j > k$ son cero, lo que significa que la matriz A es triangular superior. $\square$

5. Teorema de la triangulación ortonormal de un operador lineal en un espacio unitario. Sea V un espacio unitario y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces existe una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que la matriz asociada $T_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

Demostración. Procedemos por inducción sobre la dimensión del espacio V.

Sea $\dim(V) = 1$. Elegimos un vector normalizado b_1 en V. Entonces la lista $\mathcal{B} = (b_1)$ es una base ortonormal de V. La matriz asociada $T_{\mathcal{B}}$ consiste de una sola entrada y por lo tanto es triangular superior.

Supongamos que la afirmación del teorema es válida para cualquier operador lineal en cualquier espacio unitario de dimensión $n-1$ (es la hipótesis de inducción). Demostremos la afirmación para un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ en un espacio unitario V de dimensión n.

Como estamos considerando el caso complejo, el espectro del operador T^* no es vacío. Sea d_n un valor propio de T^* y sea b_n un vector propio normalizado asociado a d_n. Entonces $\ell(b_n)$ es un subespacio invariante bajo T^* y su complemento ortogonal

$$W \coloneqq \ell(b_n)^{\perp}$$

es invariante bajo T. Denotemos por R a la compresión de T al subespacio W:

$$R\colon W \to W, \qquad R(v) \coloneqq T(v) \qquad \forall v \in W.$$

Entonces $R \in \mathcal{L}(W)$. Notemos que $\dim(W) = n-1$. Por la hipótesis de inducción aplicada al espacio W y el operador R, existe una base ortonormal $\mathcal{A} = (b_1, \ldots, b_{n-1})$ de W tal que la matriz $R_{\mathcal{A}}$ es triangular superior, esto es,

$$Tb_k = Rb_k \in \ell(b_1, \ldots, b_k) \qquad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}. \tag{1}$$

Como $b_1, \ldots, b_{n-1} \in W = \ell(b_n)^{\perp}$, la lista $\mathcal{B} \coloneqq (b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n)$ es una base ortonormal de V. Las igualdades (1) significan que la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. $\square$

Ahora la versión matricial de este teorema.

6. Definición (triangulación de Schur de una matriz compleja cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Un par de matrices (Q, U), donde $Q \in U_n(\mathbb{C})$ y $U \in \mathfrak{ut}_n(\mathbb{C})$, tales que $A = QBQ^*$, se llama *triangulación de Schur* o *descomposición de Schur* de la matriz A.

7. Teorema (triangulación de Schur de una matriz compleja cuadrada). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Entonces existe una matriz unitaria $Q \in U_n(\mathbb{C})$ tal que la matriz Q^*AQ es triangular superior.

8. Nota: la triangulación de Schur no es única. Para toda matriz unitaria $Q \in U_2(\mathbb{C})$ tenemos

$$I_2 = QI_2Q^*,$$

así que la factorización de Schur de la matriz I_2 no es única.