Teorema de Kronecker–Capelli (criterio de consistencia de un sistema de ecuaciones lineales en términos de rangos)

Objetivos. Establecer un criterio de compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales, en términos de los rangos de la matriz del sistema y de la matriz aumentada.

Requisitos. Rango de un sistema de vectores, dimensión del subespacio generado, rango de una matriz.

1. Un sistema de ecuaciones lineales en términos de combinaciones lineales (repaso). Sean $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^m$. Entonces la igualdad $Ax = b$ se puede escribir en forma

$$x_1 a_1 + \ldots + x_n a_1 = b,$$

donde $a_k = A_{*,k}$ es la k-ésima columna de las matriz A.

2. Criterio de coincidencia de un subespacio con el espacio (repaso). Sean V un espacio vectorial, S un subespacio de V. Entonces $S = V$ si, y sólo si, $\dim(S) = \dim(V)$.

3. Lema. Sean $a_1, \ldots, a_m, b \in V$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$;

(b) $\ell(a_1, \ldots, a_m, b) = \ell(a_1, \ldots, a_m)$.

Demostración. (a)$\Rightarrow$(b). Si $b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$, entonces $a_1, \ldots, a_m, b \in \ell(a_1, \ldots, a_m)$ y por eso $\ell(a_1, \ldots, a_m, b) \subset \ell(a_1, \ldots, a_m)$. La inclusión contraria es obvia.

(b)$\Rightarrow$(a). Si $\ell(a_1, \ldots, a_m, b) = \ell(a_1, \ldots, a_m)$, entonces

$$b \in \ell(a_1, \ldots, a_m, b) = \ell(a_1, \ldots, a_m). \qquad \square$$

4. Teorema (Kronecker-Capelli). Un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es compatible (tiene una solución) si y sólo si el rango de la matriz del sistema A es igual al rango de la matriz aumentada $\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right]$:

$$\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A_{*,1}, \ldots, A_{*,n}, b]).$$

Demostración. Para abreviar, usemos la notación $a_j := A_{*,j}$. Tenemos una cadena de condiciones equivalentes:

$$\begin{aligned}
& \text{el sistema de ecuaciones lineales } Ax = b \text{ es compatible} \\
\iff \quad & \exists x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n \quad x_1 a_1 + \ldots + x_n a_n = b \\
\iff \quad & b \in \ell(a_1, \ldots, a_n) \\
\iff \quad & \ell(a_1, \ldots, a_n) = \ell(a_1, \ldots, a_n, b) \\
\iff \quad & \dim(\ell(a_1, \ldots, a_n)) = \dim(\ell(a_1, \ldots, a_n, b)) \\
\iff \quad & \mathrm{r}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{r}(a_1, \ldots, a_n, b).
\end{aligned}$$

□

5. Corolario. Un sistema de ecuaciones lineales es compatible determinado (tiene una solución única) si y sólo si son iguales los siguientes números: el rango de la matriz del sistema, el rango de la matriz aumentada y el número de las incógnitas.

Demostración. Suponemos que el sistema es compatible, i.e. el rango de la matriz del sistema es igual al rango de la matriz aumentada. Haciendo operaciones lineales de filas, reducimos la matriz del sistema a una forma escalonada reducida. Como los rangos son iguales, la matriz aumentada también será de forma escalonada reducida. Ahora el sistema tiene una solución única $\iff$ no hay incógnitas libres $\iff$ el número de las incógnitas es igual al número de elementos pivotes = número de las filas no nulas = rango de la matriz. □

6. Ejemplo. $\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 5 \end{array}\right]$.

Aquí $2 = \mathrm{r}(A) \le \mathrm{r}([A, b]) \le m = 2$, i.e. $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, b]) = 2$, y el sistema es compatible determinado.

7. Ejemplo. $\left[\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & -6 \end{array}\right]$.

Aquí $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A, b]) = 1$, y el sistema es compatible indeterminado.

8. Ejemplo. $\left[\begin{array}{rr|r} -3 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & 3 \end{array}\right]$.

Aquí $\mathrm{r}(A) = 1$ y $\mathrm{r}([A, b]) = 2$. Por lo tanto, el sistema es incompatible.

9. Ejemplo. Consideremos el caso cuando $m < n$ (el número de las ecuaciones es menor que el número de las incógnitas). En este caso $\mathrm{r}(A) \le m < n$, y el sistema no puede ser compatible determinado. Son posibles dos casos: A puede ser compatible indeterminado o puede ser incompatible. Dar ejemplos de ambos casos.