Matrices de Jordan. Forma canónica de Jordan

Objetivos. Definir matrices de Jordan y formas canónicas de Jordan.

Requisitos. Bloque de Jordan, matriz diagonal por bloques, matriz asociada a una transformación lineal, matrices semejantes.

1. Definición (matriz de Jordan). Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ se llama *matriz de Jordan* si es diagonal por bloques y sus bloques diagonales son bloques de Jordan.

2. Ejemplo. La siguiente matriz $A \in \mathcal{M}_6(\mathbb{C})$ es una matriz de Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5\,\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5\,\mathrm{i} \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(J_3(7), J_1(7), J_2(5\,\mathrm{i})).$$

3. Ejemplo. Cualquier matriz diagonal es una matriz de Jordan (sus bloques tienen tamaño 1).

4. Forma canónica de Jordan de una transformación lineal. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, de dimensión finita n, sean $T \in \mathcal{L}(V)$ y $G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ una matriz de Jordan. Se dice que G es una *forma canónica de Jordan* del operador T si existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $G = T_{\mathcal{B}}$.

5. Base de Jordan de un operador lineal. Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{F}$, de dimensión finita n, y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Una base $\mathcal{B}$ del espacio V se llama *base de Jordan* del operador T si la matriz asociada $T_{\mathcal{B}}$ es una matriz de Jordan.

6. Hacia la definición de FCJ de una matriz. A cada matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ le asociamos el operador lineal $T_A \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ definido mediante la regla $T_A(x) = Ax$. La matriz asociada a este operador T_A respecto a base canónica $\mathcal{E}$ es la matriz original A:

$$(T_A)_{\mathcal{E}} = A.$$

Aplicando la definición anterior al operador T_A y usando la fórmula de cambio de base, obtenemos la siguiente definicón de FCJ de una matriz.

7. Forma canónica de Jordan de una matriz. Sean $A, G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$. Se dice que G es una *forma canónica de Jordan* de la matriz A si G es una matriz de Jordan y existe una matriz invertible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F})$ tal que

$$G = P^{-1}AP.$$

8. Observación (forma canónica de Jordan de un operador diagonalizable). Sea $T \in \mathcal{L}(V)$ un operador diagonalizable, esto es, existe una base $\mathcal{B}$ del espacio V tal que la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Entonces $T_{\mathcal{B}}$ es una forma canónica de Jordan de T.

9. Teorema (existencia y unicidad de la forma canónica de Jordan de un operador lineal). Sea $\mathbb{F}$ un campo algebraicamente cerrado, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ de dimensión finita y sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ del espacio V tal que la matriz $T_{\mathcal{B}}$ es de Jordan. La forma canónica de Jordan de T es única salvo el orden de los bloques diagonales.

En este curso vamos a demostrar solamente la unicidad (salvo el orden de bloques) de FCJ. Para demostrar la unicidad vamos a expresar el número de los bloques $J_k(\lambda)$ en la forma canónica de Jordan de una matriz A a través de los rangos de las matrices $(\lambda I_n - A)^j$.